

5793

2. FOLGE. 1958. BAND 2. HEFT 3-4

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren
Fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien,
M. Planck, E. Grüneisen, F. Möglich

Der ganzen Reihe 457. Band

Kuratorium:

W. GENTNER, W. GERLACH, F. HUND, B. KOCKEL,
M. v. LAUE, W. MEISSNER, W. PAUL, R. W. POHL,
R. ROMPE, R. SEELIGER, W. WEIZEL

Herausgegeben von

H. KOPFERMANN
Heidelberg

G. RICHTER
Berlin



JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

UNIVERSITY
OF MICHIGAN
DEC 3 1958
PHYSICS
LIBRARY

Redaktionsluß am 12. Okt. 1958

Inhalt

E. Jeltsch, Berlin: Zum photochemischen Verhalten sensibilisierter Silberhalogenide bei verschiedenartiger Bestrahlung und nach Vorbelichtung. Mit 8 Abbildungen	81
A. Papapetrou, Berlin: Über zeitabhängige Lösungen der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie	87
L. Mollwo, Berlin-Adlershof: Elektronentemperatur und Elektronenrauschen in der hochfrequenten Fackelentladung. Mit 11 Abbildungen	97
K. W. Böer, S. Oberländer und J. Voigt, Berlin: Über die Auswertung von Leitfähigkeitsglowkurven. Mit 10 Abbildungen	130
S. Kästner, Berlin-Adlershof: Zur Theorie der Relaxation. II. Elektrische Netzwerkmodelle für das Relaxationsverhalten der Materie. Mit 20 Abbildungen	146
K. Motzke, Jena: Über den Einfluß von Magnetfeldglühungen auf das magnetische Verhalten und die Bereichsstruktur polykristalliner Ringproben aus Perminvar. Mit 6 Abbildungen	163
W. Neumann, Berlin: Die Größe der effektiven Ionisierungsspannung in Quecksilberhochdruckbögen. Mit 4 Abbildungen	168
R. Caspary, Frankfurt a. M.: Lebensdauermessungen an Photoelektronen in CdS-Kristallen mit einer Kerrzellen-Apparatur. Mit 7 Abbildungen	182
W. Steubing und J. Hengevoß, Hamburg: Die Fowler-Linie 3203 des ionisierten Heliums im homogenen elektrischen Feld. Mit 5 Abbildungen	191
R. Gáspár und I. Tamáß-Lentei, Debrecen: Zur Theorie der Hydridmoleküle nach dem Modell des vereinigten Atoms. Mit 2 Abbildungen	208

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechts der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Einsendung der Manuskripte erbeten an Prof. Dr. H. Kopfermann, Heidelberg, Albert-Ueberle-Straße 7, Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte *druckfertig* einzuliefern und in den Korrekturen den bisherigen Raum des Textes nicht zu überschreiten. Die Zeichnungen sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den Zitate wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

Die Zeitschrift erscheint in Bänden mit 8 Heften, die zwanglos ausgegeben werden. Die Lieferung erfolgt durch den Sortimentsbuchhandel, in Ausnahmefällen unmittelbar vom Verlag. Der Bezugspreis beträgt je Band 34.— (U. S. \$ 8.16) zuzügl. Postgebühren.

Die Lieferung erfolgt bis zur Abbestellung, die nur für das Ende eines Bandes ausgesprochen werden kann.

ANNALEN DER PHYSIK

7. FOLGE * BAND 2, HEFT 3-4 * 1958

Zum photochemischen Verhalten sensibilisierter Silberhalogenide bei verschiedenartiger Bestrahlung und nach Vorbelichtung

Von E. Jeltsch

Mit 8 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Das photochemische Verhalten von Silberhalogenidkristallen bei der Bestrahlung mit Röntgenlicht wird mit dem Verhalten bei der Bestrahlung mit kurzwelligem sichtbarem Licht verglichen. Der Einfluß der Vorgeschichte der Kristallproben wird untersucht, insbesondere die Wirkung einer Vorbelichtung mit verschiedener Strahlung, bei verschiedenen Temperaturen und in unterschiedlichem Ausmaß. Zur Interpretation der experimentellen Ergebnisse wird eine Modellvorstellung diskutiert.

Einleitung

Das photochemische Verhalten sensibilisierter Silberhalogenidkristalle bei Bestrahlung mit sichtbarem Licht¹⁻⁵⁾ und mit Röntgenlicht⁶⁾⁷⁾ (speziell bei Temperaturen um -180°C) ist bereits untersucht worden. Im folgenden sollen die Wirkung verschiedenartiger Bestrahlung und der Einfluß einer Vorbestrahlung auf derartige Kristalle beschrieben werden.

Versuchsdurchführung⁶⁾⁷⁾

Die Bestrahlung der Kristallproben wurde mit dem gefilterten Licht einer Quecksilberhochdrucklampe (405 bzw. 436 $m\mu$) oder mit Röntgenlicht (Bremspektrum einer Röntgenröhre mit Wolframanode, 40–70 kV) vorgenommen. Die Ausbleichung der Verfärbung wurde mit rotem Licht ($\lambda > 680 m\mu$) durchgeführt. Die Kristallproben befanden sich in einem Vakuum-Meßgefäß und wurden mit flüssiger Luft gekühlt. Höhere Temperaturen wurden mit einer elektrischen Heizung eingestellt. Die Einzelheiten der Versuchsanordnung wurden bereits an anderer Stelle beschrieben⁶⁾⁷⁾. Die

¹⁾ E. Schöne, Z. Physik **136**, 52 (1953).

²⁾ A. Scholz, Z. Physik **137**, 207 (1954).

³⁾ Ch. Volke, Z. Physik **138**, 623 (1954).

⁴⁾ A. Scholz, Ann. Physik **19**, 175 (1956).

⁵⁾ Ch. Volke, Ann. Physik **19**, 203 (1956). In ¹⁾ bis ⁵⁾ weitere Literatur.

⁶⁾ E. Jeltsch, Dissertation Berlin 1957 (Humboldt-Universität).

⁷⁾ E. Jeltsch, Zum photochemischen Verhalten sensibilisierter Silberbromid- und Silberchloridkristalle bei Röntgenlichtbestrahlung, Ann. Physik, **2**, 1 (1958).

Bestrahlungsstärke wurde jeweils während eines Versuches konstant gehalten. Es fanden vorwiegend sensibilisierte AgCl-Kristalle Verwendung, die bequeme quantitative Beobachtungen zulassen, jedoch konnten die Ergebnisse der §§ 1 und 2 auch bei AgBr-Kristallen nachgewiesen werden. Untersucht wurde stets die langwellige Hauptbande des Absorptionsspektrums.

Experimentelle Ergebnisse

§ 1. Bestrahlt man die Kristallprobe bei tiefer Temperatur (um -180°C), so ist die Intensität der erreichbaren photochemischen Verfärbung begrenzt

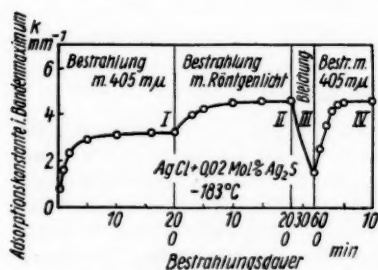


Abb. 1. Absorptionskonstante im Maximum der langwelligen Hauptbande eines AgCl-Kristalls (mit Ag_2S sensibilisiert) bei verschiedenartiger Bestrahlung. Die Bestrahlung der Kristalle und die Messung der Absorptionskonstanten erfolgte bei -183°C

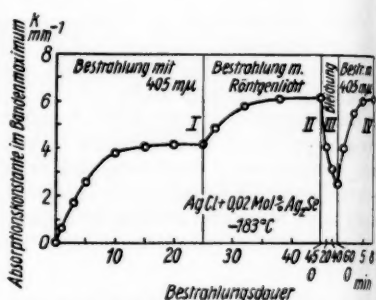


Abb. 2. Wie bei Abb. 1, jedoch für einen AgCl-Kristall mit Ag_2Se -Sensibilisierung

und wird von der Bestrahlungstemperatur bestimmt. Diese Grenzverfärbung⁶⁾ ist aber noch von der Art der zur Verfärbung benutzten Bestrahlung abhängig.

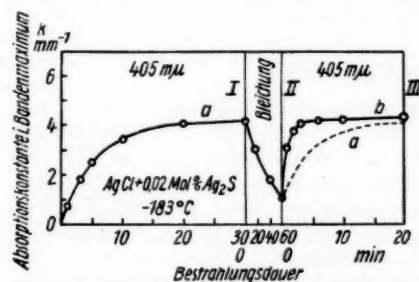


Abb. 3. Verfärbung eines AgCl-Kristalls (Ag_2S -Sensibilisierung) vor (a) und nach (b) dem Ausbleichen (zwischen II und III ist die Kurve a zum Vergleich gestrichelt eingezeichnet)

zur Grenzverfärbung, bleicht diese dann vollständig oder teilweise aus und bestrahlt erneut, so erreicht man zwar keine stärkere Verfärbung, aber die

Die Abb. 1 und 2 zeigen dieses Verhalten für kurzwelliges sichtbares und für Röntgenlicht.

Für die erreichbare Grenzverfärbung ist es belanglos, ob man sofort mit Röntgenlicht oder zunächst mit sichtbarem Licht vor und mit Röntgenlicht weiterbestrahlt. Hat man jedoch bereits eine intensivere Verfärbung mit Röntgenlicht erzeugt und mit rotem Licht ausgebleicht, so kann man auch mit sichtbarem Licht eine annähernd gleiche Verfärbung wieder erzielen (Abb. 1, 2).

§ 2. Bestrahlt man einen sensibilisierten Silberhalogenidkristall bis

Quantenausbeute ist größer geworden (Abb. 3, 4, 5; die Zunahme der Ausbeute ist für verschiedene Kristallproben recht unterschiedlich).

Bei mehrmaliger Wiederholung des Versuches steigt die Ausbeute zunächst weiter an, um dann einen konstanten Wert zu erreichen (Abb. 6).

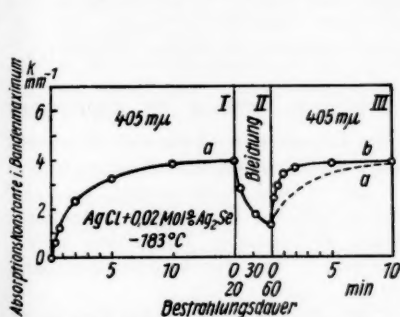


Abb. 4. Wie bei Abb. 3, jedoch für einen AgCl-Kristall mit Ag_2Se -Sensibilisierung

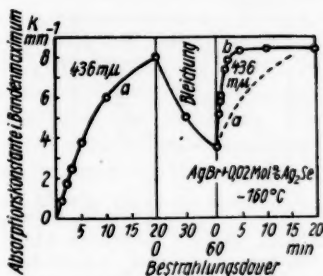


Abb. 5. Verfärbung eines AgBr-Kristalls mit Ag_2Se -Sensibilisierung bei -160°C vor (a) und nach (b) dem Ausbleichen

§ 3. Stärkere Grenzverfärbungen kann man auch bei gleicher Bestrahlungsart durch Erhöhung der Bestrahlungstemperatur erreichen⁷⁾. Bleicht man aus und verfärbt bei tiefer Temperatur erneut, so wird im allgemeinen

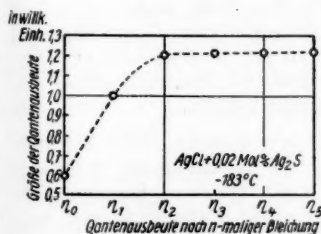


Abb. 6. Schematische Darstellung der Werte der Quantenausbeute nach n -maligem Ausbleichen und Wiederverfärbung für einen AgCl-Kristall mit Ag_2S -Sensibilisierung

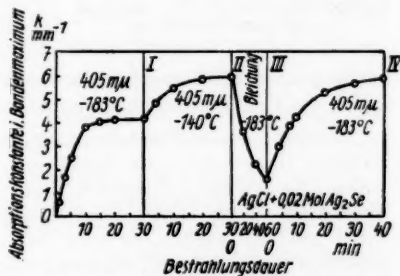


Abb. 7. Verfärbung eines AgCl-Kristalls mit Ag_2Se -Sensibilisierung bei verschiedenen Temperaturen

ebenfalls eine stärkere Grenzverfärbung beobachtet, als sie bei dieser Temperatur an sich zu erwarten ist (Abb. 7). Dieser Versuch fiel nicht bei allen Kristallproben positiv aus.

§ 4. Der Unterschied zwischen der mit Röntgenlicht und der mit sichtbarem Licht erreichbaren Grenzverfärbung nimmt mit steigender Bestrahlungstemperatur ab und wird für AgCl-Kristalle bei etwa -120°C unmeßbar. Er ist dem Sensibilisierungsgrad und damit der Verfärbungsintensität (zwischen 0,01 und 0,04 Mol-% des Sensibilisators) annähernd proportional.

§ 5. Bestrahlt man mit Röntgenlicht nicht bis zur Grenzverfärbung, so werden bei einer Nachbestrahlung mit kurzwelligem sichtbarem Licht

Grenzwerte erreicht, die zwischen denen von Röntgen- und sichtbarem Licht liegen (Abb. 8). Die Beobachtungen liegen zwischen denen, die man erwartet, wenn vom Röntgenlicht zunächst nur solche Verfärbungszentren aufgebaut würden, die auch mit sichtbarem Licht erzeugbar sind (Kurve I), und denen, die rein statistischer Auswahl im Aufbau der Absorptionszentren entsprächen (Kurve II).

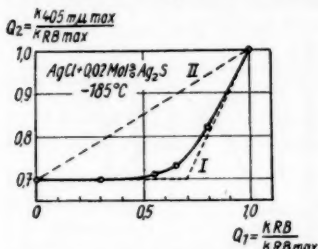


Abb. 8. Die mit sichtbarem Licht (405 mμ) nach dem Ausbleichen erreichbare Absorptionskonstante $k_{405 \text{ m}\mu \text{ max}}$ in Abhängigkeit von dem Grad der Vorbestrahlung mit Röntgenlicht (Verfärbung bis zu einer Absorptionskonstanten k_{RB}). Absorptionskonstante im Maximum der langwelligen Hauptbande eines AgCl-Kristalls mit Ag_2S -Sensibilisierung bei -185°C gemessen. $k_{RB \text{ max}}$ = mit Röntgenlicht bei der angegebenen Temperatur maximal erreichbare Verfärbung

färbung nach dem Ausbleichen vielfach mit größerer Quantenausbeute, obgleich die Grenzverfärbungen annähernd konstant bleiben.

Benutzt man als Modellvorstellung für die Absorptionszentren der langwelligen Hauptbande des Spektrums, die im vorangegangenen untersucht wurde, $\text{Ag}\ddot{\text{O}}(\text{S}\ddot{\text{g}}\text{Br}\ddot{\text{O}})'\text{-Zentren}^{(6)7)}$, die durch Einfangen von Elektronen an Vorzentren $\text{S}\ddot{\text{g}}\text{Br}\ddot{\text{O}}$ sowie durch Stabilisierung unter Anlagerung von $\text{Ag}\ddot{\text{O}}$ -Ionen gebildet werden, so muß man aus 2. und 3. schließen: Eine einmal gebildete und (eventuell teilweise) wieder ausgebleichte Verfärbung läßt im Kristallgitter Restzentren zurück, die leicht wieder stabil mit Elektronen gefüllt werden können. Da beim Ausbleichen (mit rotem Licht, $\lambda > 680 \text{ m}\mu$) gewiß das Leuchtelektron des Absorptionszentrums entfernt wird, so muß man annehmen, daß entweder der Ionenrumpf (in unserem Modell $\text{Ag}\ddot{\text{O}}\text{S}\ddot{\text{g}}\text{Br}\ddot{\text{O}}$) erhalten bleibt und daß nur Elektronen wieder angelagert zu werden brauchen, oder daß die $\text{Ag}\ddot{\text{O}}$ -Ionen zwar abwandern, aber in der Nähe verbleiben, z. B. sich an benachbarte $\text{S}\ddot{\text{g}}$ -Ionen oder Versetzungen anlagern. Auf jeden Fall bleiben im Kristall nach dem Ausbleichen auf diese Weise Vorzentren zurück, die leicht stabil mit Elektronen gefüllt werden können. Das erklärt sowohl die große Quantenausbeute als auch die Erzeugung von unter den jeweiligen Bedingungen abnorm hohen Grenzverfärbungen bei der Nachbestrahlung. Diese muß aber vorgenommen werden, ehe die vermutlich nur begrenzt stabilen Vorzentren zerfallen (das erklärt eventuell den nicht immer positiven Ausfall derartiger Versuche).

Versuch einer Deutung der Experimente

Den Experimenten kann man im wesentlichen drei Ergebnisse entnehmen:

1. Röntgenlicht verursacht bei hinreichend tiefen Temperaturen unter sonst gleichen Bedingungen intensivere Grenzverfärbungen als kurzwelliges sichtbares Licht.

2. Mit Röntgenlicht (unter Umständen auch durch Erhöhung der Bestrahlungstemperatur) erzeugte stärkere Verfärbung kann mit sichtbarem Licht (bzw. bei tieferer Temperatur) nach dem Ausbleichen wieder hergestellt werden, obgleich ohne Vorbestrahlung nur erheblich schwächere Verfärbungen erreichbar sind.

3. Bei unveränderter Bestrahlungsart, -intensität und -temperatur erfolgt die Ver-

A
sank
D
stabil
Grup
der V
Anst
Stral
zeitig
hand
strahl
N_m
verb
so m

Unte
folgt

Näh
alle

verb

Man

sorp

bun

pera

best

Vor

bun

A

idea

Best

Elek

Ion

in ei

die

die

J

kris

folg

s

s

sind

Abschließend soll eine Erklärung für die stärkere photochemische Wirksamkeit von Röntgenlicht gesucht werden.

Die Vorzentren zerfallen nach ihren Aussichten, eingefangene Elektronen stabil binden zu können, wie angenommen werden soll⁶⁾), in verschiedene Gruppen. Die Bindungswahrscheinlichkeit in der Gruppe m sei w_m , die Zahl der Vorzentren dieser Gruppe im Kristall sei n_m . Hat man nach dem steilen Anstieg der Verfärbungskurve annähernd Sättigung erreicht, so werden im Strahlungsfeld etwa so viele Absorptionszentren gebildet werden, wie gleichzeitig zerfallen. Sind bei diesem Verfärbungsgrad n_e -freie Elektronen vorhanden ($n_e = a B$, a temperaturabhängige Proportionalitätskonstante, B Bestrahlungsstärke, linearer Zusammenhang angenommen), und seien N_m^v und N_m^l die bereits in Absorptionszentren umgewandelten bzw. die noch nicht verbrauchten Vorzentren der Gruppe m , b und c Proportionalitätskonstanten, so muß im stationären Zustand gelten:

$$c \sum_m N_m^l w_m n_e = b B \sum_m N_m^v.$$

Unter der Annahme des Gleichgewichtes innerhalb jeder Zentrengruppe folgt:

$$\frac{N_m^l}{N_m^v} = \left[\frac{b}{a c} \right] \cdot \frac{1}{w_m}.$$

Näherungsweise kann man den Zustand des Kristalls so beschreiben, als ob alle Vorzentren mit $w_r > w_z$ bereits umgewandelt, die mit $w_r < w_z$ noch unverbraucht sind. w_z ist hierbei eine Grenzwahrscheinlichkeit, $w_z \approx \frac{b}{a c}$. Man findet so im Zustand annähernder Sättigung für die Anzahl der Absorptionszentren: $N_{\max} = \sum_{w_m < w_z} n_m (k_{\max} \sim N_{\max})$. w_z bestimmt den Verfärbungsgrad und hängt von der Bestrahlungsart durch a und b ab. Die Temperaturabhängigkeit der Grenzverfärbung ist vorwiegend durch die der w_r bestimmt⁷⁾; je höher die Bestrahlungstemperatur gewählt wird, desto mehr Vorzentrengruppen erfüllen die Bedingung $w_r > w_z$ und können zur Verfärbung beitragen^{7) 8)}.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich eine Erklärung für das Fehlen einer idealen Sättigung bei tiefen Temperaturen⁷⁾. Während länger andauernder Bestrahlung werden auch ungünstige Vorzentren gelegentlich stabil mit Elektronen gefüllt und dann wieder entleert werden. Dabei bleibt das AgO^- -Ion im allgemeinen in günstigerer Position zurück, so daß sich das Vorzentrum in ein leichter stabilisierbares umgewandelt hat. Dadurch erhöht sich langsam die Zahl der normalerweise mit Elektronen gefüllten Zentren und damit die Grenzverfärbung, so daß es zunächst zu keiner Sättigung kommen kann⁹⁾.

Für die stärkere Verfärbbarkeit der sensibilisierten Silberhalogenidkristalle bei der Bestrahlung mit Röntgenlicht ergeben sich aus diesem Modell folgende Erklärungsmöglichkeiten:

⁸⁾ w_z kann noch durch a etwas temperaturabhängig sein.

⁹⁾ Eine ideale Sättigung wäre erst zu erwarten, wenn alle Vorzentren verbraucht sind; so starke Verfärbungen konnten aber nicht erreicht werden.

1. Röntgenlicht könnte zwischen Zwischengitterionenbeweglichkeit fördern, z. B. durch Ionisierung von $\text{Ag}\dot{\text{O}}$ -Ionen zu $\text{Ag}\ddot{\text{O}}$ -Ionen (Vergrößerung der w_r).

2. Röntgenlicht könnte eine geringere Zerfallswahrscheinlichkeit bereits gebildeter Absorptionszentren während der Bestrahlung bedingen als sichtbares Licht (Senkung von w_z und dadurch Erhöhung von N_{max}).

3. Da energiereiche Quanten vermutlich räumlich begrenzte Schauer von Elektronen und Defektelektronen erzeugen, letztere aber z. B. durch Anlagerung $\text{Ag}\dot{\text{O}}\text{S}'_6$ -Komplexe $\text{Ag}\dot{\text{O}}$ -Ionen frei machen, so entstehen in unmittelbarer Nachbarschaft der eingefangenen Elektronen zahlreiche freie Ionen, wodurch die Bildung von $\text{Ag}\dot{\text{O}}(\text{S}'_6\text{Br}\square)$ -Komplexen gefördert wird (wiederum Senkung von w_z).

4. Schließlich besteht die Möglichkeit, daß gittereigene Störstellen, z. B. $\text{Ag}\dot{\text{O}}$ -Ionen, durch Röntgenbestrahlung erzeugt werden und so eine intensivere Verfärbung möglich wird.

Ein zwingender Grund zur Bevorzugung bestimmter dieser Möglichkeiten, insbesondere zur Annahme einer Störstellenerzeugung durch Röntgenlicht, konnte aus den Experimenten nicht entnommen werden. Vermutlich muß im Zusammenwirken der diskutierten Prozesse, insbesondere der ersten drei, die Erklärung für die spezielle Wirksamkeit des Röntgenlichtes gesucht werden.

Herrn Prof. Stasiv bin ich für anregende Diskussionen zu Dank verpflichtet.

Berlin, Institut für Kristallphysik der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 8. Januar 1958.

D
Grav
liebig
bedin
elekt
zeitu
wend
daß d

In
felder

Es k
Grav
bare
Feld
das k
es k
Die C
 $r \geq$
Form
Eich
trans
zusam
magr
D
geme
und
vorlie
und

1)
als I

Über zeitabhängige Lösungen der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie

Von A. Papapetrou

Inhaltsübersicht

Die in früheren Arbeiten¹⁾ gegebene Diskussion von zeitlich periodischen Gravitations- und elektromagnetischen Feldern wird für den Fall einer beliebigen Zeitabhängigkeit verallgemeinert. Es wird gezeigt, daß die Grenzbedingung im Unendlichen nur dann erfüllt werden kann, wenn sowohl das elektromagnetische wie auch das Gravitationsfeld für $t \rightarrow -\infty$ und $t \rightarrow +\infty$ zeitunabhängig sind. Schließlich wird die Rolle der bei der Rechnung verwendeten de Donderschen Koordinatenbedingung diskutiert und gezeigt, daß diese Ergebnisse unabhängig von der Koordinatenbedingung gelten.

Einleitung

In zwei früheren Arbeiten¹⁾ wurden zeitlich periodische Gravitationsfelder betrachtet, die der üblichen Grenzbedingung im Unendlichen genügen:

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu} \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Es konnte dort gezeigt werden, daß im Bereich $r \geq R$, in dem nach (1) das Gravitationsfeld schwach ist, die Zeitabhängigkeit dieses Feldes eine scheinbare sein muß: Mit Hilfe einer Koordinatentransformation wird man dieses Feld immer in eine zeitunabhängige Form bringen können. In II wurde auch das kombinierte Gravitations- und elektromagnetische Feld betrachtet, und es konnte gezeigt werden, daß auch in diesem Falle ein ähnlicher Satz gilt: Die Grenzbedingung (1) kann nur dann befriedigt werden, wenn im Bereich $r \geq R$ des schwachen Gravitationsfeldes beide Felder sich in zeitunabhängige Form bringen lassen, wobei dies für das elektromagnetische Feld durch eine Eichtransformation und für das Gravitationsfeld durch eine Koordinatentransformation erreicht wird. Wir können diese Ergebnisse in folgendem Satz zusammenfassen: Es gibt keine echt periodischen Gravitations- und elektromagnetischen Felder, die der Grenzbedingung (1) genügen.

Die in I und II entwickelte Methode läßt sich nach einfacher Verallgemeinerung auch auf den Fall einer beliebigen Zeitabhängigkeit anwenden und liefert einen für diesen Fall charakteristischen Satz. Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit werden wir diesen Satz für das kombinierte Gravitations- und elektromagnetische Feld aufstellen. Wir werden dabei ähnlich wie im

¹⁾ A. Papapetrou, Ann. Physik (6) **20**, 399 (1957); (7) **1**, 186 (1958); im folgenden als I und II bezeichnet.

zweiten Teil von II vorgehen. Zunächst führen wir die im Bereich $r \geq R$ des schwachen Gravitationsfeldes geltenden Entwicklungen II (1,4) und II (6,4) ein:

$$\left. \begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} + 1g^{\mu\nu} + 2g^{\mu\nu} + \dots, \\ \varphi_\alpha &= 0\varphi_\alpha + 1\varphi_\alpha + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Wir nehmen auch hier an, daß im Bereich $r \geq R$ sowohl das elektromagnetische wie auch das Gravitationsfeld keine phänomenologischen Quellen besitzen und daher die Feldgleichungen II (6,1) und II (6,2) erfüllen. Ferner wollen wir wieder von der de Donderschen Koordinatenbedingung II (1,5) und der Lorentzschen Eichung II (6,5) Gebrauch machen. Daher wird auch hier die Aufspaltung der Feldgleichungen für die verschiedenen Näherungsstufen zu genau denselben Formeln führen wie in II. Insbesondere gelten also für $0\varphi_\alpha$ und $1g^{\mu\nu}$ die Gleichungen II (6,6) und II (6,8). Der einzige Unterschied gegenüber II besteht darin, daß wir jetzt von der Annahme der Periodizität von $g^{\mu\nu}$ und φ_α , Gleichungen II (1,2) und II (1,7), absehen.

Bei der Diskussion des reinen Gravitationsfeldes werden lediglich die Gleichungen II (6,6) und II (6,8) durch I (3,9) und I (3,10) ersetzt²⁾. Die Rechnung verläuft ganz ähnlich wie im früheren Falle und führt zu dem entsprechenden Ergebnis. Bei näherer Betrachtung sieht man aber, daß diese beiden Fälle in einer wesentlichen Hinsicht voneinander verschieden sind. Während nämlich die rechte Seite von II (6,8) als die Komponente \mathfrak{T}_4^4 des Maxwellschen Spannungstensors von der speziellen Eichung II (6,5) unabhängig ist, stimmt die rechte Seite von I (3,10) nach II § 9 mit der entsprechenden Komponente eines Pseudotensors überein und wird daher von der Koordinatenbedingung II (1,5) wesentlich abhängen. Übrigens ist die Koordinatenbedingung auch für die Feldgleichung II (6,5) von Bedeutung, da sie deren linke Seite beeinflusst. Es wird daher notwendig nachzuprüfen, ob unsere Ergebnisse — und insbesondere der in I und II aufgestellte Satz für die periodischen Lösungen — mit der de Donderschen Koordinatenbedingung eng zusammenhängen oder von ihr unabhängig sind. Diese Frage wird im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit diskutiert. Das Ergebnis der Diskussion sei hier vorweggenommen: Unsere Ergebnisse sind unabhängig von irgendwelcher Koordinatenbedingung.

Gravitations- und elektromagnetisches Feld

Wir wenden uns dem im zweiten Teil von II behandelten Problem zu, wobei wir aber jetzt die Periodizitätsannahme von $g^{\mu\nu}$ und φ_α fallen lassen. Wir wollen also jetzt von der allgemeinen, von der Zeit beliebig abhängigen Lösung der Gleichung

$$\square 0\varphi_\alpha = 0 \quad (3)$$

ausgehen. Auch diese Lösung wird eine Überlagerung von Termen mit dem Faktor $\sin \omega t$ oder $\cos \omega t$ sein. Wir haben aber jetzt beliebige Frequenzen zuzulassen. Im allgemeinsten Falle wird die Überlagerung sowohl über eine diskrete Folge von Frequenzen ω_j ($j = 1, 2, \dots$) wie auch über ein kon-

²⁾ Mit $v^{\mu\nu} = 1g^{\mu\nu}$ und $w^{\mu\nu} = 2g^{\mu\nu}$.

tinuierliches Gebiet erfolgen (Linien- und kontinuierliches Spektrum):

$$\begin{aligned} {}_0\varphi_\alpha &= {}_0\varphi_{\alpha(0)} + \sum_j \{ {}_0\varphi'_{\alpha(j)} \sin \omega_j t + {}_0\varphi''_{\alpha(j)} \cos \omega_j t \} \\ &+ \int_0^\infty \{ {}_0\varphi'_{\alpha} \sin \omega t + {}_0\varphi''_{\alpha} \cos \omega t \} d\omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Die Größen ${}_0\varphi_{\alpha(0)}$, ${}_0\varphi'_{\alpha(j)}$ und ${}_0\varphi''_{\alpha(j)}$ hängen nur von x, y, z ab, während ${}_0\varphi'_{\alpha}$ und ${}_0\varphi''_{\alpha}$ auch von ω kontinuierlich abhängen. Wir werden noch annehmen, daß in (3) die Summe \sum_j und das Integral so beschaffen sind, daß die erste und zweite Differentiation nach x, y, z und t gliedweise bzw. unter dem Integrationszeichen ausgeführt werden dürfen. Wir finden dann durch Einsetzen des Ausdrucks (4) in die Gl. (3), daß ${}_0\varphi_{\alpha(0)}$ ähnlich gebaut sein muß wie die rechte Seite der Gl. I (5,5)³⁾:

$${}_0\varphi_{\alpha(0)} = \sum_{mn} (A_{\alpha m}^n \cos m\varphi + B_{\alpha m}^n \sin m\varphi) P_n^m r^{-(n+1)}.$$

Für ${}_0\varphi'_{\alpha(j)}$, ${}_0\varphi''_{\alpha(j)}$ usw. ergeben sich Ausdrücke von der in II (2,2) auftretenden Form, z. B.:

$$\begin{aligned} {}_0\varphi'_{\alpha(j)} &= \sum_{mn} \frac{1}{\sqrt{r}} P_n^m \{ \cos m\varphi (A'_{\alpha(j)m} I_{n+\frac{1}{2}} + C'_{\alpha(j)m} I_{-(n+\frac{1}{2})}) \\ &+ \sin m\varphi (B'_{\alpha(j)m} I_{n+\frac{1}{2}} + D'_{\alpha(j)m} I_{-(n+\frac{1}{2})}) \}. \end{aligned}$$

Als Argument der Besselfunktionen tritt dabei die Größe $\xi_j = r\omega_j/c$ ein. Bei ${}_0\varphi'_{\alpha}$ und ${}_0\varphi''_{\alpha}$ werden die Konstanten A, B usw. von der Frequenz ω kontinuierlich abhängen.

Wir werden zeigen, daß das Gravitationsfeld nur dann die Grenzbedingung (1) erfüllen kann, wenn die Summe \sum_j in (4) sich durch eine Eichtransformation eliminieren läßt. Für den Beweis werden wir wieder von dem zeitlichen Mittelwert der Komponente $\mu = \nu = 4$ der Gl. II (6,8) Gebrauch machen. Dabei dürfen wir aber den zeitlichen Mittelwert nicht mehr durch Gl. I (4,3) definieren, da das Feld nicht mehr periodisch ist. Folgende Definition ist der neuen Lage angepaßt⁴⁾:

$$\bar{f} = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{t_0} f dt \right). \quad (5)$$

Wenn wir mit Hilfe von (5) den zeitlichen Mittelwert der Gl. II (6,8) bilden, finden wir wieder, daß alle Terme der Form $(\dots)_4$ verschwinden: Das Zeitintegral ergibt einen endlichen Wert, der aber mit $2t_0 \rightarrow \infty$ dividiert werden muß. Das Ergebnis der Mittelung ist also wieder die Gl. II (6,9):

$$-\Delta 1g^{\mu\nu} = \{ \dots \}_4 - 2\kappa \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \eta^{\sigma\gamma} {}_0\varphi_{\sigma,\alpha} {}_0\varphi_{\sigma,\beta}. \quad (6)$$

Eine zweite Verallgemeinerung der in II verwendeten Beweismethode bezieht sich auf die Eichtransformation II (7,2),

$${}_0\varphi_\alpha^* = {}_0\varphi_\alpha + A_{,\alpha}. \quad (7)$$

³⁾ Die in I (5,5) auftretenden, zu r^n proportionalen Terme werden durch die Grenzbedingung im Unendlichen ausgeschlossen.

⁴⁾ Man überzeugt sich unmittelbar, daß diese Definition im Falle des periodischen Feldes dasselbe leistet wie I (4,3).

In II haben wir mit Hilfe dieser Transformation die Komponente ϕ_4 auf zeitunabhängige Form gebracht. Hier werden wir uns damit begnügen, aus dem durch (4) gegebenen Ausdruck von ϕ_4 nur die Summe \sum_j zu eliminieren⁵⁾. Dies wird mit Hilfe folgender Funktion Λ erreicht:

$$\Lambda = -c \sum_j \{ -\phi'_{4(j)} \cos \omega_j t + \phi''_{4(j)} \sin \omega_j t \} \omega_j^{-1}. \quad (8)$$

Tatsächlich ergibt sich durch Einsetzen von (4) und (8) in (7) die Beziehung

$$\phi_4^* = \phi_4(0) + \int_0^\infty \{ \phi_4' \sin \omega t + \phi_4'' \cos \omega t \} d\omega. \quad (9)$$

Wir können jetzt mit der Diskussion der Komponente $\mu = \nu = 4$ der Gl. (6),

$$-\Lambda 19^{44} = \{ \cdot \cdot \}_t + 2\kappa \left(\sum_k \overline{\phi_{k,4}^* \phi_{k,4}^*} - \overline{\phi_{4,4}^* \phi_{4,4}^*} \right), \quad (10)$$

beginnen. Wie wir in II bemerkten, haben die Terme $\{ \cdot \cdot \}_t$ ein endliches Volumintegral und werden daher keine bei $r \rightarrow \infty$ (logarithmisch) divergierenden Terme in 19^{44} ergeben. Wir haben also nur die eckige Klammer von (10) zu diskutieren. In dieser stört zunächst das negative Vorzeichen des letzten Termes. In Wirklichkeit ist aber dieser Term gleich Null. Es ergibt sich nämlich durch unmittelbare Rechnung, wenn man die Formeln

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t dt = 2\pi \delta(\omega), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \omega t dt = 0$$

berücksichtigt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\phi_{4,4}^*)^2 dt = \frac{\pi}{c^2} \int_0^\infty \omega^2 \{ (\phi_4')^2 + (\phi_4'')^2 \} d\omega. \quad (11)$$

Beachtet man nun die Forderung, daß ϕ_4^* und $\phi_{4,4}^*$ für alle Zeiten t endlich sein müssen, so findet man aus (9), daß sowohl ϕ_4' wie auch ϕ_4'' für $\omega \rightarrow \infty$ wie $\omega^{-\alpha}$ mit $\alpha \geq 2$ verschwinden muß. Daher liefert das Integral auf der rechten Seite von (11) einen endlichen Wert, was das Verschwinden des letzten Termes von (10) zur Folge hat.

Für die Diskussion der Summe \sum_k in (10) muß man noch die Formeln berücksichtigen:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(w) \sin \omega t + \varphi''(w) \cos \omega t) \sin \omega_j t d\omega dt &= \pi \varphi'(\omega_j) = \text{endlich}, \\ \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(w) \sin \omega t + \varphi''(w) \cos \omega t) \cos \omega_j t d\omega dt &= \pi \varphi''(\omega_j) = \text{endlich}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß die in \sum_k von (10) auftretenden Produkte eines Termes aus einer Summe \sum_j mit einem Term aus einem Fourierintegral verschwinden.

Es bleiben also nur Produkte von Termen, die beide aus Summen \sum_j stammen.

Diese Terme sind auch hier, wie im Falle der periodischen Potentiale, orthogonal zueinander. Deshalb erhält man schließlich wieder eine der Formel II

⁵⁾ Die Eliminierung des Integraltermes aus der Formel (4) für ϕ_4 kann zu Konvergenzschwierigkeiten führen, wenn z. B. $\phi_4' \neq 0$ für $\omega = 0$ ist. Diese Eliminierung ist aber für das Folgende unnötig.

(3,5) ähnlich gebaute Beziehung:

$$\int \sum_k (\varphi_{k(4)}^*)^2 dv = \frac{\pi}{2c^2} \sum_k \sum_j \sum_{mn} \omega_j^2 (\alpha_{k(j)m}^{*n})^2 \cdot \int_{r_0}^r \frac{1}{r} (I_{n+\frac{1}{2}})^2 \cdot r^2 dr$$

mit

$$(\alpha_{k(j)m}^{*n})^2 = (A_{k(j)m}^{*n})^2 + (B_{k(j)m}^{*n})^2 + \dots + (D_{k(j)m}^{*n})^2.$$

Wenn also nicht sämtliche Koeffizienten $A_{(j)}^{*n}$, $B_{(j)}^{*n}$ usw. verschwinden, wird notwendig $1g^{44} \sim \lg r$ für $r \rightarrow \infty$. Die Erfüllung der Grenzbedingung (1) wird also nur dann möglich, wenn alle diese Koeffizienten verschwinden, d. h., wenn die Summen \sum_j durch die Eichtransformation (7), (8) aus allen vier Komponenten φ_α eliminiert werden.

Es ist bemerkenswert, daß durch die Grenzbedingung (1) nur die Terme \sum_j und nicht auch die Integralterme von (4) ausgeschlossen werden. Physikalisch ist dies ohne weiteres verständlich: Ein elektromagnetisches Feld, dessen Potentiale φ_α von den Termen \sum_j frei sind, hat eine endliche Gesamtenergie.

Es ist sehr wahrscheinlich, daß sich in diesem Falle keine neuen Schwierigkeiten grundsätzlicher Art bei der Berechnung von $1g^{\mu\nu}$ ergeben werden. Die Richtigkeit dieser Vermutung sollte man aber unmittelbar nachprüfen, z. B. durch die Ausrechnung von $1g^{\mu\nu}$ für ein besonders einfach gewähltes φ_α .

Das wesentliche Merkmal eines Feldes φ_α , in dem keine Terme \sum_j enthalten sind, ist, daß es sowohl bei $t \rightarrow -\infty$ wie auch bei $t \rightarrow +\infty$ zeitunabhängig wird. Es lassen sich auch Felder dieser Art konstruieren, die im ganzen Raum singularitätenfrei sind. Das einfachste Beispiel liefert das von Syng ausführlich diskutierte Wellenfeld, welches zunächst, aus dem Unendlichen kommend, auf konzentrischen Kugeln nach dem Zentrum konvergiert und später wieder nach dem Unendlichen hinausläuft⁶⁾. In diesem Falle wird man ein im ganzen Raum schwaches Gravitationsfeld erwarten, vorausgesetzt, daß das elektromagnetische Feld nicht zu stark ist. Ein zweites Beispiel sind die von Wheeler ausführlich diskutierten Geonen⁷⁾. Bei diesen ist das Gravitationsfeld in einem zentralen Bereich $r < R$ stark. Das Hauptmerkmal dieses Feldes ist, daß es eine Lebensdauer erreichen kann, die viel größer als diejenige des Syngeschen Feldes ist. Sie bleibt aber immer endlich, wie schon von Wheeler hervorgehoben wurde und wie es auch aus unseren allgemeinen Ergebnissen folgt.

Eine analoge Rechnung läßt sich auch für das reine Gravitationsfeld anstellen und führt zu einem ähnlichen Ergebnis: Man wird ein von logarithmischen Termen freies $1g^{44}$ finden, wenn man von Lösungen $1g^{\mu\nu}$ der Gleichung

$$\square 1g^{\mu\nu} = 0$$

ausgeht, die neben den zeitunabhängigen Termen nur noch die Fourierschen Integrale (und keine Terme der Form \sum_j) enthalten. Am einfachsten könnte man von einem dem Syngeschen φ_α ähnlichen $1g^{\mu\nu}$ ausgehen und dabei $1g^{\mu\nu}$ so klein wählen, daß das Feld im ganzen Raum schwach ist. Durch

⁶⁾ J. L. Synge, *Relativity - the special theory*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1956, S. 366-372.

⁷⁾ J. A. Wheeler, *Physic. Rev.* **97**, 511 (1955).

die explizite Ausrechnung von $g^{\mu\nu}$ für ein besonders einfaches $g^{\mu\nu}$ würde man zunächst die Frage beantworten, ob tatsächlich in diesem Falle keine neuen grundsätzlichen Schwierigkeiten bei der Berechnung der höheren Näherung auftreten. Darüber hinaus hätte man dadurch ein im ganzen Raum schwaches, singularitätenfreies Gravitationsfeld in zweiter Näherung bestimmt⁸⁾.

Die Kenntnis von solchen singularitätenfreien Lösungen wäre heute in theoretischer Hinsicht interessant. Als Modelle von beständigen Teilchen sind aber Lösungen dieser Art unbrauchbar. Als einzige für diesen Zweck in Betracht kommende Lösungen bleiben die echt periodischen (da es nach dem Theorem von Lichnerowicz keine nichttrivialen zeitunabhängigen singularitätenfreien Lösungen gibt). Nach unseren allgemeinen Ergebnissen sollte eine solche Lösung nur in einem zentralen Bereich, in dem das Gravitationsfeld stark ist, zeitlich periodisch sein, dagegen außerhalb dieses Bereiches in Wirklichkeit zeitunabhängig. Die Hyperfläche, die diese Bereiche voneinander trennt, sollte nach den Ergebnissen von Stellmacher⁹⁾ sowie von Lichnerowicz und seinen Mitarbeitern¹⁰⁾ eine charakteristische Fläche (Nullfläche) des Gravitationsfeldes sein und bei dem uns hier interessierenden Problem die Zeitachse etwa zylinderförmig umgeben. Die Beantwortung der Frage nach der Existenz solcher Lösungen sowie, im positiven Falle, ihre Bestimmung wird man selbstverständlich nicht mit Hilfe von Betrachtungen erreichen, die sich lediglich auf das Gebiet des schwachen Gravitationsfeldes beschränken.

Wir wollen noch kurz erörtern, was aus unseren Ergebnissen für den Fall eines makroskopischen Gravitationsfeldes folgt, welches die Grenzbedingung (1) erfüllt, aber in einem Bereich $r < R$ makroskopische Quellen besitzt¹¹⁾. Wie wir schon für das elektromagnetische Feld bemerkt haben, wird auch hier das Feld sowohl für $t \rightarrow -\infty$ wie auch für $t \rightarrow +\infty$ zeitunabhängig. Es liegt also ein zeitunabhängiger Anfangszustand vor, der sich infolge von Prozessen, die sich innerhalb des das Feld erzeugenden materiellen Systems abspielen¹²⁾, in einen zeitabhängigen verwandelt. Dieser Zustand muß dann aber wieder mit Notwendigkeit in einen zeitunabhängigen übergehen, da das zeitabhängige Feld in den umgebenden Raum Gravitationsenergie abstrahlt. Es ist zu erwarten, daß die quantitative Verfolgung dieser Überlegungen zu einer Berechnung der z. B. von einem Doppelstern emittierten Gravitationsstrahlung führen wird.

⁸⁾ Ein ähnlicher Fall ist von W. B. Bonnor, J. Math. Mech. **6**, 203 (1957), und zwar streng, berechnet worden. Dabei handelt es sich aber um ein zweidimensionales zylindrisches Wellenfeld. Die Grenzbedingung (1) ist in diesem Falle nicht erfüllt und aus diesem Grunde ein näherer Vergleich mit unseren Ergebnissen nicht möglich.

⁹⁾ K. Stellmacher, Math. Annalen **115**, 136 u. 741 (1938).

¹⁰⁾ Vgl. A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la Gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson et Cie, Paris 1955.

¹¹⁾ Z. B. das Gravitationsfeld eines Systems zweier Körper, die in der Newtonschen Näherung sich auf elliptischen Bahnen bewegen, die im Bereich $r < R$ liegen. Der Fall zweier Körper, die sich auf hyperbolischen Bahnen bewegen, muß ausgeschlossen werden, da dann kein Gebiet $r \geq R$ mit vorgegebenem R existiert, in dem die Feldgleichungen $R_{\mu\nu} = 0$ für alle Zeiten t gelten.

¹²⁾ Z. B. Bildung von Kondensationszentren in einem anfangs homogenen, gleichmäßig rotierenden Gasnebel.

Die Rolle der Koordinatenbedingung

Wir wenden uns jetzt einer Diskussion der Rolle der Koordinatenbedingung zu und werden dadurch zeigen, daß unsere bisherigen Ergebnisse unabhängig von der de Donderschen Bedingung II (1,5) gelten. Wir behandeln zunächst das kombinierte Gravitations- und elektromagnetische Feld. Wir haben gesehen, daß bei Gültigkeit der de Donderschen Bedingung die Feldgleichung II (6,8) mindestens einige $1g^{\mu\nu}$ ergibt, die bei $r \rightarrow \infty$ logarithmisch divergieren, wenn das durch (4) gegebene elektromagnetische Potential ${}_0\varphi_\alpha$ nicht wegztransformierbare Terme der Form \sum_j enthält. Die Frage, die wir zu beantworten haben, lautet: Wird es möglich sein, die der Grenzbedingung (1) widersprechenden logarithmischen Terme durch Verlassen der de Donderschen Koordinatenbedingung aus allen $1g^{\mu\nu}$ zu eliminieren? Wir werden dabei fordern, daß das Gravitationsfeld im Bereich $r \geq R$ schwach bleibt.

Wir müssen zunächst die Feldgleichung II (6,8) für den Fall verallgemeinern, daß die de Dondersche Bedingung unterdrückt wird. Dies läßt sich mit Hilfe der allgemeinen Formeln I (2,2) und I (2,4) erreichen, indem man die bei Gültigkeit der de Donderschen Bedingung verschwindenden Terme beibehält. Das Ergebnis lautet:

$$\square 1g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} 1g_{,\alpha\beta}^{\nu\beta} - \eta^{\nu\alpha} 1g_{,\alpha\beta}^{\mu\beta} + \eta^{\mu\nu} 1g_{,\alpha\beta}^{\alpha\beta} = \dots; \quad (12)$$

die Punkte an der rechten Seite bedeuten den Ausdruck, der in der rechten Seite von II (6,8) steht. Dagegen dürfen wir die Lorentzsche Eichung II (6,5) weiter verwenden, da die rechte Seite der Gl. (12) nur den Tensor $F_{\mu\nu}$ enthält und daher von der Eichung des Potentials unabhängig ist. Die Feldgleichung des elektromagnetischen Feldes bleibt also unverändert:

$$\square {}_0\varphi_\alpha = 0.$$

Die zehn Gln. (12) sind nicht voneinander unabhängig. Differenziert man sie nämlich nach x^α , so ergibt sich eine Identität der Form $0 = 0$. Dies hat zur Folge, daß die Größen $1g_{,\nu}^{\mu\nu}$ durch die Gln. (12) nicht bestimmt werden können. Es ist zweckmäßig, statt $1g_{,\nu}^{\mu\nu}$ vier neue willkürliche Funktionen f^μ durch die Beziehung

$$\square f^\mu = 1g_{,\nu}^{\mu\nu} \quad (13)$$

einzuführen. Dann nimmt (12) folgende Form an:

$$\square 1g'^{\mu\nu} = \dots \quad (12a)$$

Die rechte Seite von (12a) ist dieselbe wie die von (12) und II (6,8), während $1g'^{\mu\nu}$ zunächst als Abkürzung für eine Summe von vier Termen dient:

$$1g'^{\mu\nu} = 1g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} f_{,\alpha}^{\nu} - \eta^{\nu\alpha} f_{,\alpha}^{\mu} + \eta^{\mu\nu} f_{,\alpha}^{\alpha}. \quad (14)$$

Aus (14) und (13) folgt nun:

$$1g_{,\nu}^{\mu\nu} = 0. \quad (15)$$

Daher ist $1g'^{\mu\nu}$ eine Lösung der Gl. II (6,8), d. h. der mit Hilfe der de Donderschen Bedingung vereinfachten Gl. (12). Deren allgemeine Lösung ist also

von der Form

$$19^{\mu\nu} = 19'^{\mu\nu} + \eta^{\mu\alpha} f_{,\alpha}^\nu + \eta^{\nu\alpha} f_{,\alpha}^\mu - \eta^{\mu\nu} f_{,\alpha}^\alpha, \quad (14a)$$

wobei f^μ vier willkürliche Funktionen sind¹³⁾.

Wir betrachten die Komponente $\mu = \nu = 4$ der Gl. (14a):

$$19^{44} = 19'^{44} + 2 f_{,4}^4 - f_{,4}^4. \quad (16)$$

Ferner multiplizieren wir (14a) mit $\eta_{\mu\nu}$:

$$\eta_{\mu\nu} 19^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} 19'^{\mu\nu} - 2 f_{,\alpha}^\alpha \quad (17)$$

und bilden den zeitlichen Mittelwert der Gln. (16) und (17). Die Terme der Form $(\dots)_{,4}$ liefern keinen Beitrag¹⁴⁾, und es bleibt

$$\overline{19^{44}} = \overline{19'^{44}} - \overline{f_{,k}^k}, \quad (k = 1, 2, 3) \quad (16a)$$

$$\eta_{\mu\nu} \overline{19^{\mu\nu}} = \eta_{\mu\nu} \overline{19'^{\mu\nu}} - 2 \overline{f_{,k}^k}. \quad (17a)$$

Andererseits finden wir, wenn wir Gl. II (6,8) mit $\eta_{\mu\nu}$ multiplizieren (und beachten, daß wir das der Gl. II (6,8) genügende $19^{\mu\nu}$ jetzt mit $19'^{\mu\nu}$ bezeichnet haben):

$$\square (\eta_{\mu\nu} 19'^{\mu\nu}) = 0.$$

Daraus folgt durch Mittelwertbildung

$$-\Delta (\eta_{\mu\nu} \overline{19'^{\mu\nu}}) = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, daß der Ausdruck $\eta_{\mu\nu} \overline{19'^{\mu\nu}}$ keine logarithmisch divergierenden Terme enthält. Aus (16a) und (17a) folgt dann aber, daß es nicht möglich ist, durch passende Wahl der Funktionen f^μ die logarithmischen Terme aus allen $19^{\mu\nu}$ zu eliminieren. Um dies nämlich für 19^{44} zu erreichen,

muß $\overline{f_{,k}^k}$ den in $\overline{19'^{44}}$ vorhandenen logarithmischen Term aufheben. Dann wird aber das Doppelte dieses Termes in $\eta_{\mu\nu} \overline{19'^{\mu\nu}}$ auftreten, da $\eta_{\mu\nu} \overline{19'^{\mu\nu}}$ keinen solchen Term enthält. Daraus folgt, daß unser Ergebnis, wonach die Grenzbedingung (1) nur dann erfüllt werden kann, wenn die Potentiale ϕ_{α} keine Terme der Form \sum_j enthalten, unabhängig von der de Donderschen Koordinatenbedingung gilt.

Wir behandeln nun den Fall des reinen Gravitationsfeldes. Die logarithmischen Terme traten in diesem Falle erst bei $2g^{44}$ auf. Die Rolle der Gl. II (6,8) wird also jetzt von der Gravitationsgleichung zweiter Näherung übernommen. Dementsprechend müssen wir die Gravitationsgleichungen erster und zweiter Näherung unabhängig von der de Donderschen Bedingung schreiben. Dies läßt sich wieder mit Hilfe der allgemeinen Formeln I (2,2) und I (2,4) erreichen

¹³⁾ Die Formel (14a) läßt sich auch mit Hilfe einer Transformation der Form I (7,1) ableiten,

$$x^\mu = x'^\mu + f^\mu + \dots,$$

wobei die f^μ klein von der ersten Ordnung sind. Die obige Ableitung hat den formalen Vorteil, daß sie auch dann gilt, wenn die f^μ nicht klein sind, was gerade bei dem von uns diskutierten Problem der Fall sein sollte: Wir versuchen, die in $19'^{\mu\nu}$ auftretenden, bei $r \rightarrow \infty$ logarithmisch divergierenden Terme mit Hilfe der willkürlichen Funktionen f^μ aufzuheben und dadurch zu Größen $19^{\mu\nu}$ zu gelangen, die bei $r \rightarrow \infty$ verschwinden.

¹⁴⁾ Die f^μ müssen für alle t endlich sein. Es ist also $\int_{-t_0}^{+t_0} f_{,4}^4 dt$ für alle t_0 endlich und daher $\overline{f_{,4}^4} = 0$.

und ergibt:

$$(14a) \quad \square 19^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} 19_{,\alpha}^{\nu\beta} - \eta^{\nu\alpha} 19_{,\alpha}^{\mu\beta} + \eta^{\mu\nu} 19_{,\alpha}^{\alpha\beta} = 0, \quad (18)$$

$$\square 29^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} 29_{,\alpha}^{\nu\beta} - \eta^{\nu\alpha} 29_{,\alpha}^{\mu\beta} + \eta^{\mu\nu} 29_{,\alpha}^{\alpha\beta} \\ = 19^{\mu\alpha} 19_{,\alpha}^{\nu\beta} + 19^{\nu\alpha} 19_{,\alpha}^{\mu\beta} - 19^{\mu\nu} 19_{,\alpha}^{\alpha\beta} - 19_{,\alpha}^{\mu\nu} 19^{\alpha\beta} + \{\cdot\cdot\}. \quad (19)$$

Der Term $\{\cdot\cdot\}$ in der rechten Seite von (19) dient als Abkürzung für die ganze rechte Seite von I (3,10).

Wir werden uns zunächst mit der Lösung der Gln. (18) und (19) beschäftigen. Wir wollen die in I und II betrachteten Lösungen der mit Hilfe der de Donderschen Bedingung vereinfachten Gleichungen (18) und (19) mit $19^{\mu\nu}$ und $29^{\mu\nu}$ bezeichnen. Wie im Falle des kombinierten elektromagnetischen und Gravitationsfeldes führen wir auch hier Funktionen $1f^{\mu}$ mittels der Gl. (13) ein:

$$\square 1f^{\mu} = 19_{,\nu}^{\mu\nu}.$$

Dann nimmt (18) die Form an:

$$\square (19^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} 1f_{,\alpha}^{\nu} - \eta^{\nu\alpha} 1f_{,\alpha}^{\mu} + \eta^{\mu\nu} 1f_{,\alpha}^{\alpha}) = 0.$$

Beachtet man noch, daß der in der Klammer dieser Gleichung stehende Ausdruck die Beziehung

$$(19^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} 1f_{,\alpha}^{\nu} - \eta^{\nu\alpha} 1f_{,\alpha}^{\mu} + \eta^{\mu\nu} 1f_{,\alpha}^{\alpha})_{,\nu} = 0$$

identisch erfüllt, so folgt, daß er mit einer Lösung $19^{\mu\nu}$ übereinstimmt. Es gilt also wieder eine Beziehung der Form (14a),

$$19^{\mu\nu} = 19^{\mu\nu} + \eta^{\mu\alpha} 1f_{,\alpha}^{\nu} + \eta^{\nu\alpha} 1f_{,\alpha}^{\mu} - \eta^{\mu\nu} 1f_{,\alpha}^{\alpha}, \quad (20)$$

mit willkürlichen Funktionen $1f^{\mu}$.

Auch die Gln. (19) sind nicht voneinander und den Gln. (18) unabhängig. Dies hat zur Folge, daß die allgemeine Lösung von (19) neben $1f^{\mu}$ noch weitere willkürliche Funktionen enthalten wird. Um diese allgemeine Lösung zu bestimmen, führen wir zunächst in die rechte Seite von (19) den Ausdruck (20) ein. Nach einer längeren elementaren Rechnung ergibt sich

$$\square (29^{\mu\nu} - \varphi^{\mu\nu}) - \eta^{\mu\alpha} (29_{,\alpha}^{\nu\beta} - \varphi_{,\alpha}^{\nu\beta}) - \eta^{\nu\alpha} (29_{,\alpha}^{\mu\beta} - \varphi_{,\alpha}^{\mu\beta})_{,\beta} \\ + \eta^{\mu\nu} (29_{,\alpha}^{\alpha\beta} - \varphi_{,\alpha}^{\alpha\beta})_{,\alpha\beta} = \{\cdot\cdot\}'. \quad (21)$$

Dabei wurde gesetzt

$$\varphi^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (1f^{\alpha} 1f^{\beta})_{,\alpha\beta} + \eta^{\alpha\beta} 1f_{,\alpha}^{\mu} 1f_{,\beta}^{\nu} - \eta^{\mu\alpha} (1f_{,\alpha}^{\nu} 1f^{\beta})_{,\beta} - \eta^{\nu\alpha} (1f_{,\alpha}^{\mu} 1f^{\beta})_{,\beta} \\ - (19^{\mu\nu} 1f^{\alpha})_{,\alpha} + 19^{\mu\alpha} 1f_{,\alpha}^{\nu} + 19^{\nu\alpha} 1f_{,\alpha}^{\mu}. \quad (22)$$

Die rechte Seite von (21) stimmt mit der rechten Seite von I (3,10) überein, wenn man darin überall $19^{\mu\nu}$ statt $19^{\mu\nu}$ schreibt. Es gilt also

$$\{\cdot\cdot\}' = \square 29^{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad 29_{,\nu}^{\mu\nu} = 0. \quad (23)$$

Wir führen nun in Analogie zu (13) neue Funktionen $2f_{\mu}$ ein durch die Beziehungen

$$\square 2f^{\mu} = (29^{\mu\nu} - \varphi^{\mu\nu})_{,\nu}.$$

Dann nimmt (21) die Form an

$$\square (29^{\mu\nu} - \varphi^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} 2f_{,\alpha}^{\nu} - \eta^{\nu\alpha} 2f_{,\alpha}^{\mu} + \eta^{\mu\nu} 2f_{,\alpha}^{\alpha}) = \{\cdot\cdot\}'. \quad (21a)$$

Beachtet man noch die Identität

$$(29^{\mu\nu} - \varphi^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} 2f_{,\alpha}^{\nu} - \eta^{\nu\alpha} 2f_{,\alpha}^{\mu} + \eta^{\mu\nu} 2f_{,\alpha}^{\alpha})_{,\nu} = 0,$$

so folgt durch Vergleich mit (23), daß der in der Klammer stehende Ausdruck mit einer Lösung $2g'^{\mu\nu}$ übereinstimmt. Es gilt also

$$2g'^{\mu\nu} = 2g'^{\mu\nu} + \varphi'^{\mu\nu} + \eta'^{\mu\alpha} 2f'_{,\alpha} + \eta'^{\nu\alpha} 2f'_{,\alpha} - \eta'^{\mu\nu} 2f'_{,\alpha}, \quad (24)$$

mit willkürlichen Funktionen $2f'^{\mu}$).

In I und II haben wir Größen $1g'^{\mu\nu}$ betrachtet, die im Unendlichen verschwinden. Da dasselbe auch von den Größen $1g'^{\mu\nu}$ gefordert wird, so folgt aus (20), daß die Funktionen $1f'^{\mu}$ ebenfalls im Unendlichen verschwinden müssen. Nach (22) wird dann dasselbe auch für die Größen $\varphi'^{\mu\nu}$ gelten. Somit stehen uns nach (24) zur Eliminierung der in $2g'^{\mu\nu}$ enthaltenen logarithmischen Terme nur die Funktionen $2f'^{\mu}$ zur Verfügung.

Wir betrachten nun die Komponente $\mu = \nu = 4$ der Gl. (24) sowie die mit $\eta_{\mu\nu}$ multiplizierte Gl. (24). Bilden wir den zeitlichen Mittelwert dieser Gleichungen, so finden wir

$$\begin{aligned} \overline{2g'^{44}} &= \overline{2g'^{44}} - \overline{2f'^k} + \dots, \\ \eta_{\mu\nu} \overline{2g'^{\mu\nu}} &= \eta_{\mu\nu} \overline{2g'^{\mu\nu}} - 2\overline{2f'^k} + \dots, \end{aligned} \quad (25)$$

wobei die weggelassenen Terme im Unendlichen verschwinden. Andererseits ergibt sich durch Multiplikation der Gl. I (3,10) mit $\eta_{\mu\nu}$, wenn man die Feldgleichung erster Näherung I (3,9) berücksichtigt:

$$\begin{aligned} \square (\eta_{\mu\nu} 2g'^{\mu\nu}) &= \frac{1}{8} \square (\eta_{\mu\nu} 1g'^{\mu\nu})^2 + \frac{1}{4} \square (\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} 1g'^{\mu\rho} 1g'^{\nu\sigma}) \\ &\quad + (\eta_{\mu\nu} 1g'^{\mu\alpha} 1g'^{\nu\beta} - \eta_{\mu\nu} 1g'^{\mu\nu} 1g'^{\alpha\beta})_{,\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (26)$$

Daraus folgt durch Mittelwertbildung

$$\begin{aligned} -\Delta (\eta_{\mu\nu} \overline{2g'^{\mu\nu}}) &= -\frac{1}{8} \Delta (\overline{\eta_{\mu\nu} 1g'^{\mu\nu}})^2 - \frac{1}{4} \Delta (\overline{\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} 1g'^{\mu\rho} 1g'^{\nu\sigma}}) \\ &\quad + (\overline{\eta_{\mu\nu} 1g'^{\mu k} 1g'^{\nu l}} - \overline{\eta_{\mu\nu} 1g'^{\mu\nu} 1g'^{kl}})_{,kl}. \end{aligned} \quad (26a)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung liefert ein endliches Volumintegral. Daher wird der Ausdruck $\eta_{\mu\nu} \overline{2g'^{\mu\nu}}$ keinen logarithmischen Term enthalten. Somit haben wir bei den Gln. (25) dieselben Verhältnisse wie bei den Gln. (16a) und (17a). Der dort gegebene Beweis läßt sich also auch hier unverändert wiederholen und führt zu den Ergebnis, daß es unmöglich ist, durch passende Wahl der Funktionen $2f'^{\mu}$ die logarithmischen Terme aus allen $2g'^{\mu\nu}$ zu eliminieren. Damit haben wir bewiesen, daß auch in diesem Falle unsere Ergebnisse unabhängig von der de Donderschen Koordinatenbedingung gelten.

¹⁵⁾ Die Formeln (20), (24) lassen sich auch durch Betrachtung einer Koordinatentransformation der Form

$$x'^{\mu} = x'^{\mu} + 1f'^{\mu} + 2f'^{\mu} + \dots$$

ableiten, wobei $1f'^{\mu}$ klein von der ersten, $2f'^{\mu}$ von der zweiten usw. Ordnung ist. Man beachte dazu die Bemerkung in der Fußnote¹⁵⁾.

Berlin, Forschungsinstitut für Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Bei der Redaktion eingegangen am 24. Januar 1958.

Elektronentemperatur und Elektronenrauschen in der hochfrequenten Fackelentladung

Von Ludwig Mollwo

Mit 11 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Die Rauschtemperatur der Elektronenfackel in Luft und Stickstoff von Atmosphärendruck wird bei einer Meßwellenlänge von $\lambda = 20$ cm zu etwa 14000°K bestimmt. Außerdem werden Leistung und Widerstand für das erfaßte Volumen gemessen. Die Diskussion zeigt, daß etwa 13500°K der Elektronentemperatur, 380°K dem Schrotrauschen zuzuordnen sind. Die Gastemperatur ist etwa 4000°K . Die Entladungssäule ist in einem Zustand, der einer bei Atmosphärendruck brennenden Gleichstrom-Glimmentladungssäule entspricht. Es wird gezeigt, daß die Stabilisierung eines derartigen Zustandes bei einer Hochfrequenzentladung wesentlich leichter möglich ist als bei einer Gleichstromentladung.

1. Allgemeines zum Rauschen von Gasentladungen

Seit Mumford¹⁾ im Jahre 1949 die Niederdruck-Entladungsröhre mit Edelgasfüllung als Rauschnormal in die Höchsthochfrequenztechnik einführte, sind eine Reihe von Untersuchungen über solche Rauschquellen erschienen. Johnson und De Remer²⁾, Knol³⁾ sowie Davies und Cowcher⁴⁾ zeigten experimentell, daß im allgemeinen recht gute Übereinstimmung zwischen der Elektronentemperatur T_e in der positiven Säule der Entladung und deren Rauschtemperatur T' besteht. T' ist dabei in Anlehnung an die bekannte Nyquist-Beziehung definiert durch

$$T' = \frac{N_a}{k \Delta f} \quad (1)$$

N_a = nach außen angebotene Rauschleistung

k = Boltzmann-Konstante

Δf = erfaßter Frequenzbereich.

Ebensogut kann T' auch als Strahlungstemperatur der Quelle unter Bedingungen, die schwarze Strahlung gewährleisten, definiert werden, wobei wie im

¹⁾ W. W. Mumford, Bell Syst. Tech. J. **28**, 608 (1949).

²⁾ H. Johnson u. K. R. De Remer, Proc. IRE **39**, 908 (1951).

³⁾ K. S. Knol, Philips Res. Rep. **6**, 288 (1951).

⁴⁾ L. W. Davies u. E. Cowcher, Austral. J. Phys. **8**, 108 (1955).

optischen Gebiet gilt

$$K_f = \frac{k T'}{\lambda^2} \quad (\text{Rayleigh-Jeans}) \quad (2)$$

K_f = spektrale Strahldichte der Quelle
 λ = Wellenlänge zur Frequenz f

und

$$dN = 2 K_f df dF d\omega^* \cos \vartheta, \quad (3)$$

N = Strahlungsleistung

dF = Element der Auffangfläche für N

$d\omega^*$ = Element des Raumwinkels, unter dem die Quelle von dF aus erscheint

ϑ = Winkel zwischen dF und der Richtung von $d\omega^*$.

Die Identität der beiden Definitionen folgt z. B. aus der Betrachtung eines Systems im thermischen Gleichgewicht, das aus einer strahlenden Hohlkugel mit der Strahlungstemperatur T' und einer eingeschlossenen verlustfreien Antenne mit der Wirkfläche F und einem für maximale Leistungsübertragung abgestimmten Abschlußwiderstand ebenfalls der Rauschtemperatur T besteht. Der Leistungsfluß durch die Antenne von innen nach außen ist

$$N_a = T' k \Delta f.$$

Der Leistungsfluß von außen nach innen folgt durch Integration von (3), wobei jedoch zu berücksichtigen ist, daß der Faktor 2 wegen der linearen Polarisation der Antenne fortfällt:

$$N = \oint \frac{k T'}{\lambda^2} df dF d\omega^* \cos \vartheta.$$

Hierin stellt $dF \cos \vartheta$ das wirksame Empfangsflächen-Element für die verschiedenen Richtungen dar. Bei der Antenne darf dafür die richtungsabhängige Wirkfläche F_{ω^*} eingeführt werden, die mit dem ebenfalls richtungsabhängigen Antennengewinn G_{ω^*} in der Beziehung steht

$$F_{\omega^*} = G_{\omega^*} \frac{\lambda^2}{4\pi} \quad (4)$$

G bezogen auf den isotropen Kugelstrahler.

Es wird

$$N = \frac{k T' \Delta f}{4\pi} \oint G_{\omega^*} d\omega^*.$$

Wie die Antennentheorie zeigt, ist

$$\oint G_{\omega^*} d\omega^* = 4\pi. \quad (5)$$

Es folgt

$$N_a = N = k T' \Delta f$$

was nur möglich ist, wenn die beiden Definitionen von T' wirklich austauschbar sind.

Für Lichtbögen zeigten Skolnik und Pucket⁵⁾ im Gebiet sehr kleiner Ströme sowie Takakura, Baba, Nunogaki und Mitani⁶⁾ bei etwas größeren Strömen, daß dort im größten Teil des Hochfrequenzgebiets ver-

⁵⁾ M. J. Skolnik u. H. R. Pucket, jr., J. Appl. Phys. **26**, 74 (1955).

⁶⁾ T. Takakura, K. Baba, K. Nunogaki u. H. Mitani, J. Appl. Phys. **26**, 185 (1955).

gleichsweise sehr hohe Rauschtemperaturen T' vorkommen. In beiden Arbeiten ergab sich ein starker Abfall von T' bei sehr hohen Rauschfrequenzen. Die Ursache der hohen Werte von T' ist nach Skolnik und Pucket das Auftreten von Kippeschwingungen, die oszillographisch beobachtet und in ihrer Entstehung geklärt wurden. Takakura, Baba, Nunogaki und Mitani schließen aus den beobachteten Rauschspektren für verschiedene Gasdrücke und Materialien, daß Ionen-Plasmaschwingungen für das erhöhte Rauschen maßgebend seien. In beiden Arbeiten wird der gleiche starke Einfluß des Kathodenmaterials und der Stromstärke auf die Rauschtemperatur festgestellt und gefunden, daß das Rauschen hauptsächlich im Kathodengebiet entsteht. Beide Untersuchungen beziehen sich auf den Bogen mit kalter Kathode, Skolnik und Pucket betonen ausdrücklich, daß das Rauschen verschwindet, wenn der stabile thermische Bogen einsetzt.

An Niederdruckentladungen sind neben den oben angeführten Arbeiten noch eine größere Zahl von Untersuchungen über das Rauschen durchgeführt worden, die hauptsächlich den Bereich niedrigerer Frequenzen betreffen. Labrum und Bigg⁷⁾ konnten unter geeigneten Bedingungen an Glimmentladungen in Luft von 0,01 bis 0,1 Torr teils mit kalter, teils mit Glühkathode ein breites, intensives Rauschband im Bereich 200–600 MHz und gleichzeitig Rauschen im Gebiet von 1 MHz erzeugen; beide Effekte nahmen mit zunehmendem Druck ab. Der Entstehungsort war offenbar ein Gebiet nahe der Kathode. Um hohes Rauschen zu erhalten, mußte dort eine Einschnürung des Glimmlichts und eine Umkehr der Feldrichtung erzeugt werden, andernfalls verschwand das Rauschen. Es werden Schwingungen der Elektronen und der Ionen an dieser Stelle wie bei einem Barkhausen-Kurz-Generator vermutet. Außerdem wurden kohärente Schwingungen bei 200 kHz beobachtet, die gleichzeitig mit einer Schichtung der positiven Säule auftraten, wobei zwischen der Frequenz und dem Abstand der Schichten eine Beziehung über stehende Wellen vermutet wurde. Als Ursache der 200 kHz wird ein „growing wave“-Prozeß nach Haeff⁸⁾ angenommen.

Emeleus und Mitarbeiter haben sich in einer Reihe von Arbeiten mit dem Rauschen von Niederdruck-Gasentladungen beschäftigt^{9–12)}. Die Ursache für die vielfach beobachteten breiten Rauschbänder bis zu einigen MHz sollen danach fast immer Kippvorgänge oder dergleichen infolge von Instabilitäten in Gebieten nahe der Kathode oder an Querschnittsänderungen sein, besonders wenn dort Potentialminima auftreten. Eine gewisse Beeinflussung durch die Spannung der Meßsonden und den äußeren Kreis ist oft möglich. Eigentliche Ionenschwingungen werden erst bei Ionenstrahlen mit einer viel höheren Energie erwartet, als sie in Glimmentladungen und normalen Lichtbögen vorkommen¹¹⁾. Im Gebiet 100 MHz und darüber werden Elektronen-Plasmaschwingungen mit definierter Frequenz durch Elektronenströmungen angeregt, die höhere Geschwindigkeiten haben als die thermischen Plasmaelektronen und die von der Elektrode ausgehen. Es wird ein „growing

⁷⁾ N. R. Labrum u. E. K. Bigg, Proc. phys. Soc. B **65**, 356 (1952).

⁸⁾ A. V. Haeff, Proc. Inst. Radio Engrs. **37**, 4 (1949).

⁹⁾ R. A. Bailey u. K. G. Emeleus, Proc. Irish Acad. **57**, 53 (1954).

¹⁰⁾ T. K. Allen, R. A. Bailey u. K. G. Emeleus, Brit. J. appl. Phys. **6**, 320 (1955).

¹¹⁾ K. G. Emeleus, Suppl. Nuovo Cim. **3**, 495 (1956).

¹²⁾ H. Martin u. K. G. Emeleus, Nature **177**, 943 (1956).

wave“-Prozeß nach Haeff⁸⁾ angenommen, der in einem Abstand zu einer Katastrophe führt, die sich in Lichterscheinungen, Änderung von Größe und Richtung der Elektronengeschwindigkeit und eben in Plasmaschwingungen äußert. Bei hohem Entladungsstrom bleibt es nicht bei der Elektronenplasmafrequenz allein, sondern es entstehen zusätzlich andere Frequenzen im gleichen Frequenzgebiet und auch die schon beschriebenen Frequenzbänder niedriger Frequenz. Neben diesem intensiven, auf eine oder wenige Frequenzen beschränkten Rauschen erwähnt Emeleus in einigen Arbeiten für das Gebiet über 100 MHz ein schwächeres, breites Kontinuum, das er auf die thermische Elektronenbewegung und auf Ionisations- und Rekombinationsprozesse zurückführt.

Thong¹³⁾ sowie Thong und Martin¹⁴⁾ haben das Rauschen unterhalb von 3 MHz an einer Glühkathoden—Quecksilberdampf-Entladung im Druckbereich $7 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-3}$ Torr untersucht. Starkes Rauschen war nur vorhanden, solange mit Strömen unterhalb des Sättigungsknicks gearbeitet wurde. Es entstand annähernd ein weißes Spektrum, das aber oberhalb von 1 MHz scharf abbrach. Beim Übergang ins Sättigungsgebiet fiel das Rauschen auf einen kleinen Wert ab, der sich bis zu höheren Frequenzen erstreckte. Gleichzeitig verschwand das Potentialminimum vor der Kathode, das Plasmapotential gegen die Anode änderte sich von etwa -3 V auf $+1$ V und die Elektronentemperatur in der Säule fiel nach Sondenmessungen von etwa $23\,000^\circ$ K auf etwa $11\,000^\circ$ K. Es ließen sich auch Bedingungen unterhalb des Sättigungsknicks herstellen, wo niedrige Elektronentemperatur und hohes Rauschen zusammentrafen. Auch aus Intensitätsgründen wird daher für das hohe Rauschen ein Ursprung in der Raumladungsschicht nahe der Kathode angenommen. Das übrige Plasma wird dabei praktisch gleichphasig angeregt, wie durch oszillographische Messungen mit 2 Sonden festgestellt wurde. Thong beobachtete weiter, daß negativ aufgeladene Sonden ein sehr kräftiges Zusatzrauschen verursachen konnten.

Speziell mit dem „schwachen“ Rauschen haben sich Kojima, Takayama und Shimauchi¹⁵⁾ befaßt. Sie untersuchten eine Argon—Quecksilberdampf-Entladung mit Glühkathode bei 2 Torr und 60 mA. Durch Vergleich mit einer Rauschdiode wurde im Bereich 1–10 MHz die Rauschtemperatur zu 9300° K bestimmt, während eine Bestimmung der Elektronentemperatur mit der Doppelsonde 9800° K ergab. Es war also nur thermisches Rauschen vorhanden. Wenn aus der zur Messung benutzten Sonde Gleichstrom entnommen wurde, so entstand eine zusätzliche Rauschtemperatur, die proportional dem Quadrat des entnommenen Gleichstroms und weiter proportional $1/f$ war, aber nur unterhalb von 10 MHz eine merkliche Rolle spielte. Diese Komponente wird auf Ionisations- und Rekombinationsprozesse zurückgeführt.

Neben diesen experimentellen Arbeiten existieren theoretische Untersuchungen von Parzen und Goldstein¹⁶⁾ und von v. d. Ziel¹⁷⁾. Beide

¹³⁾ Thong Saw Pak, Proc. phys. Soc. B **68**, 292 (1955).

¹⁴⁾ Thong Saw Pak u. H. Martin, J. Electronics **2**, 128 (1956).

¹⁵⁾ S. Kojima, K. Takayama u. A. Shimauchi, J. Phys. Soc. Japan **9**, 802 (1954).

¹⁶⁾ P. Parzen u. L. Goldstein, Phys. Rev. **79**, 190 (1950) u. **82**, 724 (1951).

¹⁷⁾ A. v. d. Ziel, J. Appl. Phys. **24**, 223 (1953).

Rechnungen gelten für die positive Säule und leiten die Rauschleistungen aus der Bewegung der Elektronen ab. Der Beitrag der wegen ihrer Masse langsamen Ionen wird vernachlässigt. Parzen und Goldstein berücksichtigen außer der thermischen Elektronengeschwindigkeit auch die Driftgeschwindigkeit der Elektronen im angelegten elektrischen Feld, die infolge der Stoßprozesse eine Mikrostruktur statistischen Charakters aufweist. Sie erhalten für die entnehmbare Rauschleistung P_a

$$\frac{P_a}{\Delta f} = k T_e + \frac{P_0}{V n_e z} \left[1 + \frac{2}{1 + \left(\frac{\omega}{z} \right)^2} \right] \cos^2 \vartheta \quad (6)$$

V = erfaßtes Volumen

P_a = aus V auskoppelbare Rauschleistung

P_0 = V zugeführte Gleichstromleistung

Δf = erfaßte Bandbreite

n_e = Elektronendichte

z = Stoßfrequenz der Elektronen

ω = Meß-Kreisfrequenz

ϑ = Winkel zwischen Anregungs- und Auskoppelfeld.

Bei der Ableitung ist Maxwell-Verteilung der Elektronengeschwindigkeiten angenommen und die Stoßfrequenz als unabhängig von der Elektronengeschwindigkeit angesetzt. Auf Ionisations- und Rekombinationsprozesse und die dadurch schwankende Elektronendichte n_e ist keine Rücksicht genommen. Der erste Term der Gleichung stellt, wie man sofort übersieht, die thermische Rauschleistung nach Nyquist dar. Der zweite Term kann als Schrotrauschen $k T_{\text{Schr}}$ aufgefaßt werden. Man sieht, daß dies Glied beim Überschreiten der Grenze $\omega \approx z$ einen Abfall auf $1/3$ ergibt, sonst aber konstante Werte, d. h. weißes Rauschen liefert. V. d. Ziel hat ergänzend zu dieser Arbeit den Effekt der schwankenden Elektronendichte untersucht und dabei nur die geglättete Driftbewegung der Elektronen ohne die erwähnte Mikrostruktur berücksichtigt. Er erhält eine zusätzliche entnehmbare Rauschleistung, die Ähnlichkeit mit dem Funkeffekt der Elektronenröhren oder dem Überschußrauschen der Halbleiter hat und durch die Zusatztemperatur T_{Zus} beschrieben wird

$$k T_{\text{Zus}} = \frac{P_0 \tau}{V n_e} \frac{1}{1 + (\omega \tau)^2} \cos^2 \vartheta \quad (7)$$

V = erfaßtes Volumen

P_0 = V zugeführte Gleichstromleistung

\bar{n}_e = mittlere Elektronendichte

τ = mittlere Lebensdauer der Elektronen

ω = Meß-Kreisfrequenz

ϑ = Winkel zwischen Anregungs- und Auskoppelfeld.

Man übersieht, daß T_{Zus} für Meßfrequenzen $\omega > 1/\tau$ nach Null geht. Da τ groß gegen die Stoßzeit $1/z$ ist, erreicht T_{Zus} wesentlich höhere Werte als T_{Schr} , geht aber bereits bei Meßfrequenzen $\omega \ll z$ nach Null.

Die zahlreichen weiteren theoretischen Arbeiten, die besonders für die Radioastronomie zur Deutung des beobachteten überthermischen Rauschens

von Plasmen im Gebiet der m-, dm- und cm-Wellen von Bedeutung sind, sollen hier nur kurz angedeutet werden. Folgende Prozesse sind behandelt worden:

1. Bremsstrahlung von Elektronen, wobei nur der ganz langwellige Ausläufer des Spektrums wirksam wird. Auf die zum Teil lineare Polarisation der Strahlung hat kürzlich Erickson¹⁸⁾ hingewiesen. Abgesehen von der verschiedenen Elektronengeschwindigkeit handelt es sich um einen Vorgang, der dem von Parzen und Goldstein untersuchten ähnlich ist.

2. Strahlung von Elektronen-Umläufen in Magnetfeldern. Bei niedrigen Elektronengeschwindigkeiten kommt es zur Emission der Gyrofrequenz, bei relativistischen Elektronengeschwindigkeiten entsteht eine Synchrotronstrahlung mit sehr breitem Spektrum. Die Polarisation ist zirkular bzw. bei der Synchrotronstrahlung rein linear (G. Thiessen¹⁹⁾).

3. Strahlung von Elektronen-Plasmaschwingungen. Während ursprünglich die Ausstrahlung von elektromagnetischer Energie bei diesem Prozeß für unmöglich gehalten wurde, haben neuere Arbeiten über Plasmawellen verschiedene Auswege aufgezeigt²⁰⁻²⁶⁾.

4. Strahlung von Übergängen in Atomen oder Molekülen. Hierher gehört vor allem die bekannte Wasserstoffstrahlung bei der Wellenlänge 21 cm.

Es ist ersichtlich, daß die Prozesse 2. bis 4. mit Ausnahme der Synchrotronstrahlung eine Linienstrahlung, d. h. ein sehr schmales Rauschband liefern.

2. Bisherige Kenntnisse über die Elektronenfackel; Problemstellung

Die in 1. betrachteten früheren Arbeiten hatten durchweg den Zweck, die Ursachen des Rauschens der untersuchten Entladungen zu klären, wobei die Entladungsbedingungen als mehr oder weniger gut bekannt vorausgesetzt werden konnten. Bei der Elektronenfackel dagegen haben die bisher angewandten Untersuchungsmethoden gerade in dem wichtigen Punkt der Elektronentemperatur noch kein sicheres Bild ergeben. Das Ziel der angestellten Untersuchungen war nun umgekehrt wie bei den erwähnten Arbeiten mit Hilfe von Rauschmessungen Aufschluß über die Elektronentemperatur und damit den Plasmazustand der Entladung zu bekommen. Über die ersten Versuche in dieser Richtung hat der Verfasser auf der Physikertagung in Wiesbaden 1955 berichtet²⁷⁾. Ähnliche Untersuchungen an verschiedenen Gasentladungslampen sind gleichzeitig und unabhängig von Larenz angestellt worden, der darüber ebenfalls in Wiesbaden vortrug²⁸⁾. Es ist bei

¹⁸⁾ W. C. Erickson, *Nature* **179**, 773 (1957).

¹⁹⁾ G. Thiessen, *Naturwiss.* **44**, 26 (1957).

²⁰⁾ D. Bohm u. E. P. Gross, *Physic. Rev.* **75**, 1851 u. 1863 (1949).

²¹⁾ V. A. Bailey, *Physic. Rev.* **83**, 439 (1951).

²²⁾ R. W. Larenz, *Naturwiss.* **40**, 527 (1953); *Z. Naturforschung* **10a**, 766 u. 901 (1955); Vortr. Arbeitstagung über Probleme des Plasmas, Leipzig, Oktober 1956, Akademie-Verlag, Berlin, im Druck.

²³⁾ P. L. Bhatnagar, E. P. Gross u. M. Krook, *Physic. Rev.* **94**, 511 (1954).

²⁴⁾ E. P. Gross u. M. Krook, *Physic. Rev.* **102**, 593 (1956).

²⁵⁾ F. Berz, *Proc. physic. Soc. B* **69**, 939 (1956).

²⁶⁾ N. G. v. Kampen, *Physica* **23**, 641 (1957).

²⁷⁾ L. Mollwo, *Physik. Verh.* **6**, 176 (1955).

²⁸⁾ R. W. Larenz, *Physik. Verh.* **6**, 176 (1955); W. Finkelnburg u. H. Maecker, *Elektrische Bögen und thermisches Plasma* in „Handbuch der Physik“ **22**, 373, Springer-Verlag 1956.

diesem Weg vorausgesetzt, daß es gelingt, die Messungen so anzulegen, daß sie nicht durch Plasmaschwingungen, Kippvorgänge nahe der Kathode und Sondereffekte gestört wird. Als wichtigstes Hilfsmittel bietet sich dabei nach allen angeführten Arbeiten die Benutzung einer genügend hohen Meßfrequenz an.

Die einpolige Hochfrequenz-Fackelentladung wurde unabhängig und in kurzen Abständen von Zilitinkewiĉ²⁹⁾, Baxter³⁰⁾ und Heinrich³¹⁾ an Hochfrequenzsendern von 10^7 – 10^8 Hz und beträchtlicher Leistung beobachtet und beschrieben. Eine gute Zusammenfassung der bis heute vorliegenden Untersuchungsergebnisse mit einer Liste der wesentlichen Literatur geben Cristescu und Grigorovici³²⁾. Einige weitere, dort nicht erwähnte Arbeiten stammen von Rohde und Wedemeyer³³⁾, Alford und Pickles³⁴⁾, Babat³⁵⁾, Markus³⁶⁾, Cobine und Wilbur³⁷⁾, Truneček³⁸⁾ sowie Boyd und Twiddy³⁹⁾.

Abb. 1 zeigt die untersuchte Fackel von rund 2 cm Länge in Luft von Atmosphärendruck, die mit rund 940 MHz bzw. 32 cm Wellenlänge und etwa 100 W Leistung erzeugt wurde. Die konzentrische Ausbildung der Elektroden, die einfach durch das offene Ende einer Koaxialleitung gebildet werden, stammt von Cobine und Wilbur³⁷⁾. Durch den rohrförmigen Außenleiter des Brenners wird in schwachem Strom das untersuchte Gas zugeführt. Passende Transformationsglieder sorgen für eine Spannung von etwa 1000 V am offenen Leitungsende und für Leistungsanpassung an den Hochfrequenzgenerator. Abb. 1a zeigt die flammenähnliche Aureole, die der Fackel den



Abb. 1. Elektronenfackel in Luft von Atmosphärendruck bei 32 cm Wellenlänge und etwa 100 W Leistung, a lange, b kurze Belichtungszeit

Namen gegeben hat. Abb. 1b läßt den ungefähr zylindrischen Entladungskern und den helleuchtenden Fleck erkennen, in dem die Entladung auf der Elektrode aufsitzt. Hier ist ohne Zweifel eine positive Raumladung

²⁹⁾ S. J. Zilitinkeviĉ, *Telegr. i Telef. bez Provod.* **9**, Nr. 6, 51 (1928).

³⁰⁾ K. Baxter, *Radio News* 1204 (1928).

³¹⁾ K. Heinrich, *ETZ* **50**, 1655 (1929).

³²⁾ G. D. Cristescu u. R. Grigorovici, *Revue de Physique I*, 103 (Bukarest 1956).

³³⁾ L. Rohde u. G. Wedemeyer, *ETZ* **61**, 1161 (1940).

³⁴⁾ A. Alford u. S. Pickles, *Trans. AIEE* **59**, 129 (1940).

³⁵⁾ G. I. Babat, jr., *J. Inst. Elec. Engrs. III* **94**, 27 (1947).

³⁶⁾ J. Markus, *Electronics* **23**, Nr. 2, 120 (1950).

³⁷⁾ J. D. Cobine u. D. A. Wilbur, *Electronics* **24**, Nr. 6, 92 (1951).

³⁸⁾ V. Truneček, *Acta Ac. Sci. Nat. Moravo-Silesiacae* **25**, 202 (1953).

³⁹⁾ R. L. F. Boyd u. N. D. Twiddy, *Electronic Engineering* **26**, 78 (1954).

entweder dauernd oder mit der Hochfrequenz pulsierend vorhanden, in der die große Masse der Elektronen und Ionen gebildet wird. Die spektroskopischen Beobachtungen ergeben in Übereinstimmung hiermit für den Fleck das Vorhandensein schnellerer Elektronen als im Flammenkern trotz niedrigerer Temperatur. Die elektrischen Messungen über die Schicht sind widerspruchsvoll. Cristescu und Grigorovici³⁹⁾ fanden bei Betriebsfrequenzen von 10 bis 70 MHz etwa die Bedingungen des Kathodenfalls einer stromstarken Glimmentladung bei Atmosphärendruck, Cobine und Wilbur⁴¹⁾ dagegen erhielten bei einer Betriebsfrequenz von 915 MHz aus Sondenmessungen nur einen Gleichspannungsabfall von etwa 10 V. Hierzu kann man allerdings die Überlegung anstellen, daß mit steigender Frequenz allmählich die Notwendigkeit der Elektronenemission aus der Elektrode mit ihrem hohen Spannungsbedarf und ihrer geringen Ausbeute entfällt, da der Raum bis zur Elektrode jeweils in einer Halbperiode vom Plasma her mit Elektronen aufgefüllt wird und sich in der folgenden Halbperiode nicht mehr in dem Maße erschöpft. Es bleibt natürlich mit der Bildung einer Raumladungsschicht, aber nur mit Spannungen in der Größenordnung des Anodenfalls zu rechnen.

Für die eigentliche Flamme ist von Cristescu und Grigorovici⁴⁰⁾, Popow⁴²⁾ und Chochlow⁴³⁾ aus der Intensitätsverteilung der Rotationslinien von Molekülbanden eine über die ganze Länge ziemlich gleichbleibende Gastemperatur von 3000–4000° K bestimmt worden, die durch verschiedene andere Meßmethoden gut gesichert ist. Abgesehen von Fällen mit stark vermindertem Gasdruck oder besonders niedriger Betriebsfrequenz oder -leistung gaben die spektroskopischen Messungen keinen Anhalt für stärkere Abweichungen des Plasmazustandes vom thermischen Gleichgewicht, das ja im Gleichstromfall bei Atmosphärendruck allgemein angenommen wird. Auch der von Cristescu und Grigorovici³⁹⁾ durchgeführte Vergleich des gemessenen Entladungsstroms mit dem aus der thermischen Ionisation berechneten stimmt gut. Cobine und Wilbur jedoch fanden aus Sondenmessungen an verschiedenen Stellen einer mit 350 W bei 900 MHz betriebenen Stickstoff-Fackel Elektronentemperaturen von rund 80 000 bis 130 000° K, während die Gastemperatur bei 3000°, also in normaler Höhe lag. Die hohe Elektronentemperatur wird von den Autoren in Parallele zu elektrodenlosen Niederdruck-Entladungen gesetzt. Die starke Diskrepanz in der Frage des thermischen Gleichgewichts gab Veranlassung, für eine unabhängige Bestimmung der Elektronentemperatur Messungen des Rauschens der Fackel heranzuziehen.

Vorausgegangen waren diesem Entschluß eigene Wiederholungen der spektroskopischen und der Sonden-Messungen. Die Gastemperatur einer Stickstoff-Fackel unter den Bedingungen der Abb. 1 wurde dabei aus der Stickstoffbande bei 3371 Å zu 4000° bestimmt. Die Sondenmessungen, bei denen wegen der hohen Gastemperatur eine Schwingsonde verwendet wurde, lieferten zwar recht ähnliche Sondenkennlinien wie in⁴¹⁾, die aber für eine nur

⁴⁰⁾ G. D. Cristescu u. R. Grigorovici, *Naturwiss.* **29**, 571 (1941).

⁴¹⁾ J. D. Cobine u. A. D. Wilbur, *J. Appl. Phys.* **22**, 835 (1951).

⁴²⁾ L. W. Popow u. A. L. Stolow, *Utsch. sapiski Kasansk. Univ.* **118**, Nr. 9, 53 (1953).

⁴³⁾ M. S. Chochlow, Moskauer Dissert. 1954, *J. exp. theor. Phys.* **29**, 645 (1955).

einigermaßen sichere Auswertung nicht geeignet waren. Es zeigte sich auch, daß die Sonde wegen ihrer Erdkapazität unvermeidlich zum Gegenpol der Hochfrequenzentladung wurde und damit starke Feldverzerrungen verursachte.

3. Theoretische Überlegungen zum Mechanismus der Fackelentladung

Die folgenden theoretischen Überlegungen sprachen trotz der Hochfrequenzanregung gleichfalls gegen eine Elektronentemperatur in der Nähe von $100\,000^\circ$. In Betracht kommt für stärkere Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht nur das Gebiet, in dem noch Energie zugeführt wird. Eine nennenswerte Gleichstromleistung wird nicht übertragen, obwohl ein gewisses Gleichspannungsgefälle längs der Flamme von Cobine und Wilbur beobachtet wurde, da nach eigenen Messungen kein Gleichstrom in die Flamme fließt. Aber es wird Energie vom Hochfrequenzfeld geliefert, soweit es aus der Öffnung des Brenners austritt. Dabei spielt mit, daß der Flammenkern die Eigenschaften eines elektrischen Leiters hat. Die Dämpfung ist allerdings sehr groß. Es zeigt sich, daß für die in Frage kommenden Bedingungen die zahlenmäßige Auswertung der bekannten Drahtwellengleichungen⁴⁴⁾ möglich ist.

Setzt man innerhalb und außerhalb des Flammenkerns die Permeabilitäten $\mu/\mu_0 = 1$, die Dielektrizitätskonstanten $\epsilon/\epsilon_0 = 1$ und führt den Kernradius a und die Kernleitfähigkeit κ ein, so gelten für die komplexe Ausbreitungskonstante α bei der Kreisfrequenz ω die Bestimmungsgleichungen

$$\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\right)^2 - (a\alpha)^2 = \xi^2 \quad (8)$$

mit

$$\xi^2 - \eta^2 = \left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\right)^2 j \frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}$$

$$\eta \frac{J_0(\eta)}{J_1(\eta)} \frac{1}{\xi} \frac{H_1^{(1)}(\xi)}{H_0^{(1)}(\xi)} = 1 - j \frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}.$$

Für die Feldstärken \mathcal{E} im Abstand z von einer Bezugsebene senkrecht zur Achse des Flammenkerns wird geschrieben

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{z=0} \cdot e^{-j\alpha z},$$

λ_0 ist die zu ω gehörende Vakuum-Wellenlänge. Für die Fackel nach Abb. 1 war $a \approx 0,06$ cm, $\omega = 5,9 \cdot 10^9$ 1/s, $\lambda_0 = 32$ cm und wie sich noch ergeben wird, $\kappa \approx 4 \cdot 10^{-2}$ S cm⁻¹. Dabei wird

$$\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\right)^2 = \left(\frac{2\pi \cdot 0,06}{32}\right)^2 = 1,39 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{5,9 \cdot 10^9 \cdot 0,886 \cdot 10^{-13}} = 76,5$$

$$\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\right)^2 \cdot \frac{\kappa}{\omega \epsilon_0} = 1,39 \cdot 10^{-4} \cdot 76,5 = 1,06 \cdot 10^{-2}.$$

Bei der Lösung des Gleichungssystems benutzen wir an Stelle der näherliegenden Bedingung

$$\xi^2 - \eta^2 \ll 1$$

⁴⁴⁾ A. Sommerfeld, Ann. Physik **67**, 233 (1899); W. O. Schumann, Elektrische Wellen, C. Hanser Verlag, München 1948.

die etwa gleichwertigen Ansätze

$$\begin{aligned} \eta &\approx \xi & \text{für } 1 > |\xi| > 0,3 \\ |\eta| < 0,3 & \text{für } 0,3 > |\xi| > 0,05. \end{aligned} \quad (9)$$

Außerdem machen wir von den Näherungsbeziehungen Gebrauch⁴⁵⁾

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(\xi) &= J_0(\xi) \left\{ 1 + j \frac{2}{\pi} \left[\ln \frac{\xi}{2} + C + \left(\frac{\xi}{2} \right)^2 \right] \right\} \\ H_1^{(1)}(\xi) &= J_1(\xi) \left\{ 1 + j \frac{2}{\pi} \left[\ln \frac{\xi}{2} + C - \frac{1}{2} \left(1 + \left[\frac{2}{\xi} \right]^2 \right) \right] \right\} \quad (10) \\ &\text{für } |\xi| < 1 \quad C = 0,57721 \dots \\ \eta \frac{J_0(\eta)}{J_1(\eta)} &= 2 & \text{für } |\eta| < 0,3 \\ \xi \frac{J_0(\xi)}{J_1(\xi)} &= 2 & \text{für } |\xi| < 0,3. \end{aligned} \quad (11)$$

Die transzendente Gleichung läßt sich damit für die beiden betrachteten Bereiche von ξ auf die gleiche Form bringen

$$\frac{1 + j \frac{2}{\pi} \left[\ln \frac{\xi}{2} + C - \frac{1}{2} \left(1 + \left[\frac{2}{\xi} \right]^2 \right) \right]}{1 + j \frac{2}{\pi} \left[\ln \frac{\xi}{2} + C + \left(\frac{\xi}{2} \right)^2 \right]} = 1 - j \frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}. \quad (12)$$

Zur Lösung wurde eine Tafel des links stehenden Quotienten Q für $\xi = |\xi| j^{\varphi_\xi}$ aufgestellt. Geht man mit der Bedingung

$$\operatorname{Re}(Q) = 1 \quad (13)$$

rückwärts in die Tafel ein, so findet man einerseits Werte $\xi = |\xi| j^{\varphi_\xi}$, andererseits über

$$\operatorname{Im}(Q) = -j \frac{\kappa}{\omega \epsilon_0} \quad (14)$$

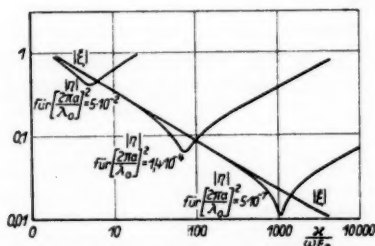


Abb. 2. Lösung der Drahtwellengleichung für kleine Leitfähigkeit κ und 3 Quotienten von Drahtradius a zur Vakuumwellenlänge λ_0 . $|\xi|$ für das Feld im Außenraum, $|\eta|$ für das Feld im Draht

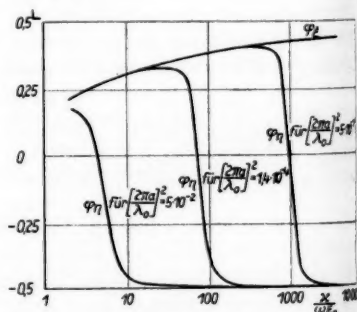


Abb. 3. Lösung der Drahtwellengleichung für kleine Leitfähigkeit κ und 3 Quotienten von Drahtradius a zur Vakuumwellenlänge λ_0 . φ_ξ für das Feld im Außenraum, φ_η für das Feld im Draht

⁴⁵⁾ E. Madelung, Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, 4. Aufl., 117, J. Springer, Berlin 1950.

die zugehörigen Werte $\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}$, die der transzendenten Gleichung genügen. Abb. 2 zeigt $|\xi|$ und $|\eta|$ als Funktion von $\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}$, Abb. 3 φ_ξ und φ_η ebenfalls als Funktion von $\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}$. Für gegebene Frequenz f läßt sich mit $|\xi|$ und φ_ξ nach Abb. 2 bzw. 3 und Gl. (8) die komplexe Ausbreitungskonstante α errechnen. Übersichtlicher als die Komponenten von α sind die Wellenlänge der Drahtwelle

$$\lambda_D = \frac{2\pi}{\operatorname{Re}(\alpha)} \quad (15)$$

und die Abklingstrecke (Spannungsrückgang auf $\frac{1}{e}$) $L_D = \frac{-j}{\operatorname{Im}(\alpha)}$. Diese Größen

sind in Abb. 4 abhängig von $\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}$ bzw. κ für die Bedingungen bei der Fackel $a = 0,06$ cm und $\lambda_0 = 32$ cm dargestellt.

Man sieht, daß für $\kappa = 0,04$ Scm^{-1} die Abklingstrecke bei 0,6 cm liegt. Etwa die gleiche Größenordnung ergibt auch die folgende Abschätzung für das aus der Brenneröffnung austretende Hochfrequenzfeld. Betrachtet man die Brenneröffnung als Strahler mit konzentrischer Erregung und einem Außenradius R_2 , einem Innenradius $R_1 < R_2$, so wird die Feldstärke \mathcal{E}_z auf der Brennerachse im Abstand z und in Achsen-, d. h. z -Richtung⁴³⁾

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{R2} \frac{R_2}{2z} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_1}{z}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_2}{z}\right)^2}} \right] \quad (16)$$

und für $z \gg R_1$

$$\mathcal{E}_z \approx \mathcal{E}_{R2} \frac{R_2}{2z} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_2}{z}\right)^2}} \right]. \quad (17)$$

\mathcal{E}_{R2} ist dabei die Feldstärke am Außenrand der Brenneröffnung. Mit $\frac{z}{R_2} = \frac{2}{3}$ erhält man

$$\mathcal{E}_z = 0,334 \mathcal{E}_{R2}.$$

Da R_2 sich zwischen 5 mm bei dem Brenner nach Abb. 1 und 16 mm bei dem Brenner von Cobine und Wilbur bewegt, klingt das Feld ebenfalls auf höchstens 1 cm Strecke weitgehend ab.

⁴³⁾ S. A. Schelkunoff, Bell Syst. techn. J. 15, 92 (1936); F. W. Gundlach, Grundlagen der Höchsthochfrequenztechnik, Springer, Berlin 1950.

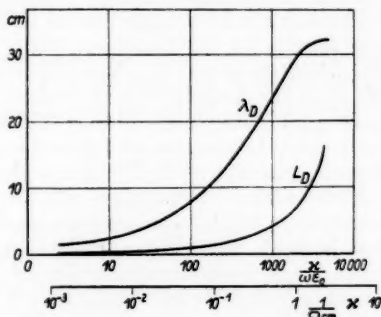


Abb. 4. Wellenlänge λ_D der Drahtwellen und Abklingstrecke L_D für einen Plasmakanal mit dem Radius $a = 0,06$ cm bei der Vakuumwellenlänge $\lambda_0 = 32$ cm abhängig von der Leitfähigkeit κ

Im Gebiet dieses Hochfrequenzfeldes haben wir nun nach den heutigen Vorstellungen einfach einen Akkumulierungsprozeß der jeweils auf den einzelnen freien Wegstrecken zugeführten Energie durch Umwandlung in thermische Energie, d. h. eine durch die Stöße bedingte Aufheizung der Elektronen. Es ist der gleiche Vorgang, der sich in jeder Gleichstromentladung abspielt. Die Elektronentemperatur hört dabei auf der Betriebs-Frequenz zu folgen, sobald diese Frequenz nicht mehr klein gegen die Stoßfrequenz ist. Erst dann, wenn die benutzte Frequenz höher wird als die Stoßfrequenz, wird das Hochfrequenzfeld weniger wirksam als das Gleichfeld. In diesem Gebiet wird aber bei der Fackel nicht gearbeitet. Energieübertragung über Molekülresonanzen braucht bei der Betriebsfrequenz nicht berücksichtigt zu werden. Wir haben also hinsichtlich der Energiezufuhr und der Trägererzeugung praktisch die gleichen Bedingungen wie bei Gleichstrom. Die Trägerverluste durch Diffusion und Rekombination der Träger sind ebenfalls praktisch die gleichen. Die Wanderung der Träger zur Elektrode, die im Hochfrequenzfeld anders als bei Gleichstrom verläuft, kann alle erwähnten Prozesse nicht erheblich beeinflussen. Die Trägerbilanz sieht also genauso aus wie bei Gleichstrom, und man wird daher auch gleiche Elektronentemperaturen annehmen dürfen, wenn auch bei dem hohen Druck die auf diese Bilanz gegründete Diffusionstheorie von Schottky⁴⁷⁾ ihre Gültigkeitsgrenze erreicht. Durch analoge Gleichgewichts-Überlegungen kommt man weiter dazu, auch gleiche Gas-temperatur wie bei einer entsprechenden Gleichstromentladung zu erwarten, was ja durch die bereits vorliegenden Messungen auch vollkommen bestätigt wird. Es ist danach sehr naheliegend, den bei Gleichstrom und Atmosphärendruck normalen Entladungszustand, d. h. praktisch thermisches Gleichgewicht zu erwarten.

4. Die Meßmethode für die Rauschtemperatur der Fackel

Die Rauschmessungen an der Fackel wurden bei einer Meßfrequenz von rund 1500 MHz, d. h. einer Wellenlänge von 20 cm durchgeführt. Bei dieser hohen Frequenz bleibt nur das thermische Rauschen der Elektronen und das Schrotrauschen übrig. Andererseits ist die Frequenz noch nicht so hoch, daß Schwierigkeiten durch zu geringe Eindringtiefe in das Plasma entstehen. Der genaue Wert $\lambda = 20,55$ cm war durch die Verwendung einer vorhandenen Apparatur für radioastronomische Rauschmessungen bedingt. Er paßt gut zu der verwendeten Betriebswellenlänge der Fackel von 32 cm, denn die Abstände von der Grundwelle sowohl wie von der ersten Harmonischen sind groß. Auf gewisse Einzelheiten wird weiter unten eingegangen.

Die Meßmethode läuft darauf hinaus, die Entladung und eine Standardquelle bekannter Rauschtemperatur am Eingang der empfindlichen radioastronomischen Anzeigeapparatur zu substituieren. Als Standardquelle wurde ein Rauschgenerator mit einer gesättigten Diode benutzt, der wegen der bereits merklichen Einflüsse von Elektronenlaufzeit und von Transformationseffekten durch Induktivität und Kapazität des Elektrodensystems an einen geheizten Widerstand als absolutes Normal angeschlossen war. Die Rauschtemperatur T_{η} eines solchen Generators bei einem Leitwert η des

⁴⁷⁾ W. Schottky, Physik. Z. **25**, 342, 635 (1924).

eingebauten Widerstands kann in der Form geschrieben werden

$$T_y = T_0 + \frac{e \bar{I}_D}{2 k Re(y)} C_f \quad (18)$$

T_0 = Raumtemperatur

\bar{I}_D = Dioden-Gleichstrom

e = Elementarladung

k = Boltzmann-Konstante

C_f = frequenzabhängiger Korrektionsfaktor.

Für die Messung ist es erforderlich, daß die beiden substituierten Rauschquellen den gleichen Widerstand haben und daß möglichst nahe Anpassung an den Eingang der Anzeigeapparatur vorhanden ist^{4b)}. Praktisch bedeutet das hier im dm-Gebiet, daß alle 3 Geräte gut an Leitungswellenwiderstand Z , in unserem Fall 70Ω , angepaßt werden.

Bei dem Flammenplasma wird die Anpassung durch eine Anordnung nach Abb. 5 erreicht. Der Brenner ist mit seiner Öffnung unmittelbar an einen konzentrischen Resonator angebaut. Von der in diesem Fall kegel-

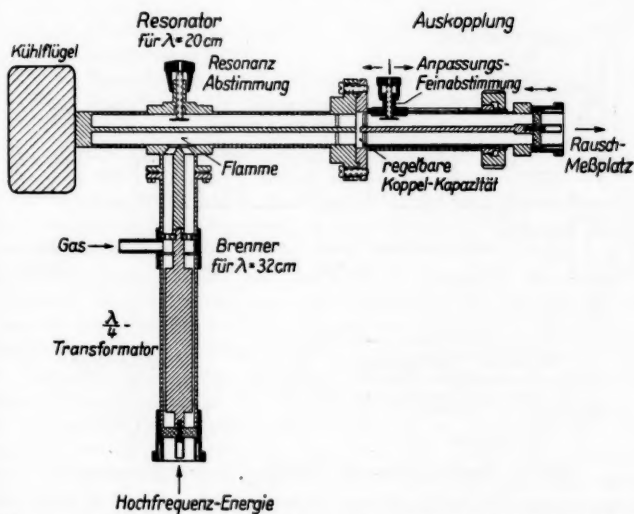


Abb. 5. Anpassung des Plasmas von der Rauschtemperatur T' an den Rauschmeßplatz

förmigen inneren Brennerelektrode tritt die Entladung in den Resonatorhohlraum ein und endet auf dem Mittelleiter des Resonators. Die zugeführte Wärme wird durch Kühlflügel am kurzgeschlossenen Ende des Resonators abgeführt. Am Brenner erkennt man die Zuführung des Gases und der Hochfrequenzenergie sowie das Transformationsglied, das auf hohe Spannung an der Brenneröffnung übersetzt. Der Resonator hat für die Meßwellen-

^{4b)} L. Mollwo, AEÜ 11, 295 (1957).

länge 20,55 cm eine Länge von $\frac{3}{4}\lambda$ und wird bei $\frac{1}{4}\lambda$ durch die Flamme, d. h. durch die in ihr enthaltenen Rauschspannungen angeregt. An seinem offenen Ende ist eine regelbare kapazitive Auskopplung angeflanscht, mit der der Anpassungswiderstand von $70\ \Omega$ eingestellt wird. Dabei wird mit einer Meßleitung vom Ausgang her in den Resonator hinein gemessen. Die beiden eingezeichneten Trimmkapazitäten dienen zur Erleichterung der genauen Einstellung und Abstimmung auf die Meßfrequenz.

Für die Betriebswellenlänge der Fackel von 32 cm ist der Resonator recht nahe $\lambda/2$ lang, also nicht schwingungsfähig. Das ist ein wichtiger Kunstgriff. Der Kreis ist dadurch nicht fähig, 32-cm-Energie vom speisenden HF-Generator zur Meßapparatur zu übertragen. Wegen der sehr großen der Flamme zugeführten Leistung würde man sonst eine Übersteuerung des Empfängers bekommen. Man darf andererseits die Wellenlängen nicht genau im Verhältnis 3:2 wählen, denn die übergelassene Generatorleistung ist immer noch groß genug, um durch Oberwellenmischung starke Störungen zu geben.

Die ganze Meßapparatur ist in Abb. 6 schematisch dargestellt. Der Resonator mit dem Brenner und der Auskopplung sowie der Rauschgenerator sind entsprechend ihrem wirklichen Aufbau angedeutet. Die Umschaltung

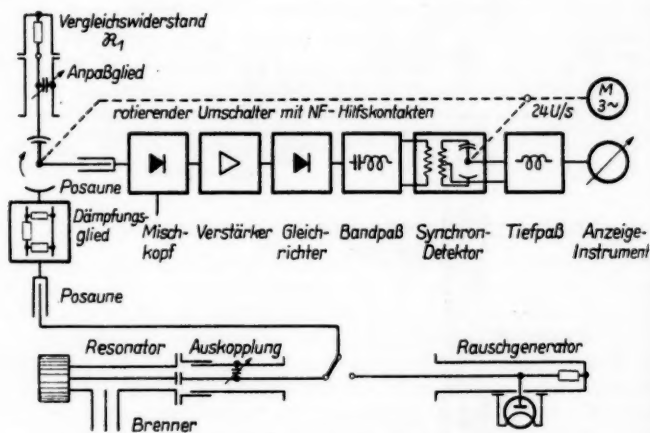


Abb. 6. Gesamtschema zur Messung der Rauschtemperatur

zwischen beiden erfolgte in Wirklichkeit nicht mit dem symbolisch eingezeichneten Schalter sondern durch Umlegen der Leitung zur übrigen Schaltung. Für die radioastronomische Apparatur ist im wesentlichen ein Blockschema gegeben. Sie enthält eingangsseitig einen rotierenden Hochfrequenz-Umschalter, der periodisch im Wechsel die zu messende Rauschquelle und einen Vergleichswiderstand R_1 an eine mit Detektoren arbeitende Mischstufe legt. Eine zwischengeschaltete Posaune gestattet, die Leitungslänge um etwa $\lambda/2$ zu ändern. Der Zwischenfrequenzverstärker, der auf die Mischstufe folgt, übernimmt von dort zu seinem Eigenrauschen das feste Rauschen der Detektoren, außerdem abwechselnd einen Rauschanteil von der untersuchten

Quelle bzw. vom Vergleichswiderstand. Ein Temperaturunterschied zwischen beiden macht sich dabei als Mäander-Modulation des Rauschens bemerkbar. Am Ausgang des Zwischenfrequenzverstärkers liegt ein Gleichrichter, der neben Gleichstrom und Niederfrequenz-Rauschen die entsprechende niederfrequente Mäander-Spannung liefert. Diese wird durch das nächste Glied der Schaltung, einen Bandpaß, herausgesiebt und in dem nun folgenden phasenempfindlichen Gleichrichter oder Synchron-Detektor gleichgerichtet. Der Schalttakt für den Gleichrichter wird dabei vom Hochfrequenzschalter her gegeben, wie es in Abb. 6 schematisch angedeutet ist. Außer der Gleichspannung entsteht wegen der notwendigen Bandbreite des Bandpasses immer noch ein gewisser Anteil Rauschen. Vor das schreibende Anzeigegerät am Ende der Apparatur ist daher noch ein Tiefpaß mit ganz niedriger Grenzfrequenz gelegt, der das Rauschen und damit die Anzeigeschwankungen bis auf einen geringen Rest unterdrückt. Die erste derartige in Einzelheiten abweichende Modulationsanlage ist von Dicke⁴⁹⁾ aufgebaut und berechnet worden. Die Formel für die Anzeigeschwankungen kann auf die Form gebracht werden^{50) 51)}.

$$\frac{\Delta T}{F^* T_0} = \pi \sqrt{\frac{G}{B_1}} \quad (19)$$

ΔT = Anzeigeschwankungen in Temperaturmaß

T_0 = Raumtemperatur

F^* = Rauschzahl des Empfängers, bezogen auf die volle wirksame Bandbreite des Mischstufeneingangs⁵²⁾

B_1 = Bandbreite des Zwischenfrequenzverstärkers

G = Bandbreite des Ausgangs-Tiefpasses.

Man sieht, daß durch eine kleine Bandbreite G und eine große Bandbreite B_1 die Schwankungen sehr klein gemacht werden können, so daß eine recht sichere Rauschanzeige erreicht wird.

Die Meßschaltung enthält nun noch einige Elemente, die wegen der geringen Bandbreite des Resonators eingeführt sind. Die Bandbreite ist zwar größer als die Zwischenfrequenz-Bandbreite der Apparatur, reicht aber nicht, um Anpassung auf den beiden spiegelsymmetrischen Bändern herzustellen, die die Mischstufe am Empfängereingang erfaßt. Man kann die Bandbreite in gewissen Grenzen durch den Wellenwiderstand des Resonators beeinflussen. Es wurde ein Wellenwiderstand von $Z_R = 16,4 \Omega$ gewählt. Bei entsprechender Resonanzabstimmung war dann volle Leistungsübertragung im einen und verschwindende Leistungsübertragung im anderen Band vorhanden. Man hat dann in diesem zweiten Band eine kräftige Fehlanpassung des Re-

⁴⁹⁾ R. H. Dicke, Rev. Sci. Instrum. 17, 268 (1946).

⁵⁰⁾ L. Mollwo, Vortrag Fachtagung Radioastronomie der D. Akad. d. Wiss. zu Berlin, März/April 1955, Akademie-Verlag, Berlin, im Druck.

⁵¹⁾ S. J. Goldstein, jr., Proc. IRE 45, 365 (1957).

⁵²⁾ Bei den normalen Empfängern der Nachrichtentechnik wird stets mit einer fiktiven Rauschzahl F gearbeitet, die für eine gedachte Antenne bzw. einen Ersatz-Eingangswiderstand gerechnet ist, die nur im Empfangsband aber nicht im Spiegelfrequenzband rauschen. In der Radioastronomie hat fast immer das empfangene Rauschsignal ein ebenso breites Rauschspektrum wie das Eigenrauschen des Eingangswiderstandes. Hier hat es daher keinen Sinn, mit der fiktiven Rauschzahl F zu rechnen. Bei voll wirksamem Spiegelfrequenzband ist $F = 2 F^*$.

sonators, die zu erheblichen Meßfehlern führen kann⁴⁸⁾. Um trotzdem einen nahezu angepaßten Abschluß des Empfängereingangs zu haben, ist das in Abb. 6 eingetragene Ohmsche Dämpfungsglied eingeschaltet, das beiderseits für 70Ω -Abschlüsse bemessen ist und eine Leistungsdämpfung auf $\frac{1}{4}$ verursacht. Die außerdem eingeschaltete Posaune erwies sich als vorteilhaft, da offenbar bei einer gewissen Leitungslänge eine Kompensation von Fehlern des Dämpfungsglieds durch den fehlangepaßten Abschluß stattfand. Eine ähnliche Justierung wurde auch auf der anderen Eingangsseite des Hochfrequenzschalters durch das Anpaßglied vor dem Vergleichswiderstand R_1 vorgenommen.

Der Leistungsverlust im Dämpfungsglied wurde in Kauf genommen. Im Prinzip wäre es möglich gewesen, ihn durch eine Richtungsleitung mit Ferritelementen, wie sie bei kürzeren Wellen heute schon viel verwendet werden, zu vermeiden. Bei der Auswertung mußte natürlich berücksichtigt werden, daß der Rauschgenerator im Gegensatz zum Resonator auf beiden Empfangsbändern Energie liefert. Bei gleicher Anzeige wurde die Flammentemperatur gleich dem doppelten der Rauschtemperatur des Rauschgenerators gesetzt. Durch eine Kontrollmessung, bei der der Rauschgenerator nur in einem Band wirksam war, wurde die Berechtigung dieser Umrechnung bestätigt.

Trotz der verschiedenen Regelemente und genauer Kontrolle des richtigen Abstandes zwischen der Meßfrequenz, die auch für die Anpassungsmessung am Resonator verwendet wurde, und der Frequenz des Mischoszillators ließen sich gewisse Abweichungen von der vollkommenen Anpassung nicht vermeiden. Die hierbei zu erwartenden Meßfehler wurden praktisch vollkommen eliminiert, indem jeweils 2 Messungen mit 2 um $\lambda/4$ verschiedenen Leitungslängen zwischen Hochfrequenzumschalter und Mischstufe gemittelt wurden⁴⁸⁾.

5. Die Meßmethoden für den Leitwert und die Leistung im erfaßten Flammenvolumen

Ergänzend zu den Rauschmessungen wurde auch der Leitwert und die aufgenommene Hochfrequenzleistung für das erfaßte Flammenvolumen

gemessen. Die Leitwertmessung beruht auf einer Bestimmung der Halbwertsbreite des Resonators bei brennender Fackel. Dabei wurde, wie Abb. 7 zeigt, die Darstellung der Resonanzkurve im Kreisdiagramm nach Smith⁵³⁾ benutzt. Der frequenzabhängige Ausgangswiderstand des Resonanzkreises wird durch die beiden Leitungskoordinaten Anpassungsmaß m und äquivalente Leitungslänge l/λ charakterisiert. Beide Größen können

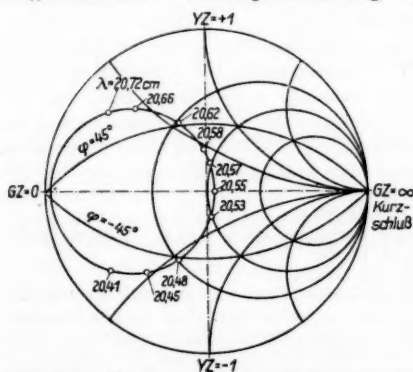


Abb. 7. Kreisdiagramm nach Smith für den Resonator und Bestimmung der Halbwertsbreite

⁵³⁾ P. H. Smith, *Electronics* 12, Nr. 1, 29 (1939) und 17, Nr. 1, 190 (1944).

einfach mit der Meßleitung bestimmt werden, indem vom Ausgang des Auskoppelgliedes bei verschiedenen Frequenzen in den Resonator hineingemessen wird. $1/\lambda$ folgt aus der Lage des Minimums an der Meßleitung durch Berücksichtigung der Leitungslänge bis zum Auskoppelkondensator, ausgedrückt in der jeweiligen Wellenlänge. Die Resonanzkurve ist ein Kreis, dessen einzelne Punkte jeweils einer Wellenlänge entsprechen. Die Schnittpunkte des Kreises mit den Ortskurven für 45° Phasenwinkel des Kreiswiderstands geben die Halbwertspunkte. Mit dem Wellenwiderstand Z_R des Resonators, auf dessen Bestimmung hier nicht eingegangen werden kann, ergibt sich der Flammenleitwert G_R unter Berücksichtigung der Resonatorlänge von $3/4 \lambda$ zu

$$G_R = \frac{1}{Z_R} \frac{3\pi}{4} \frac{\lambda_{+45^\circ} - \lambda_{-45^\circ}}{\lambda_0} \quad (20)$$

Die Methode setzt voraus, daß im Auskoppelglied hauptsächlich die Koppelkapazität und nur in geringem Umfang die Trimmkapazität benutzt wird, da sonst eine Verformung der Resonanzkurve eintritt. Abb. 8 zeigt noch das Anpassungsmaß m über der Wellenlänge λ aufgetragen. Man sieht, daß über die Zwischenfrequenzbandbreite 2 MHz gute Anpassung erreicht ist.

Leistungsmessungen wurden sowohl mit einem Durchgangsleistungsmesser am Eingang des Brenners als auch mit einem Absorptionsleistungsmesser am Ausgang des Auskoppelgliedes vorgenommen. Es zeigte sich dabei, daß auch unter optimalen Auskoppelbedingungen nur wenige Prozent der zugeführten Leistung am Ausgang entnommen werden konnten. Danach erfassen wir offenbar mit dem Resonator nur ein Teilvolumen der Flamme, in dem ein entsprechend kleiner Teil der insgesamt zugeführten Hochfrequenzleistung wirksam ist. Das Einkoppelglied, d. h. die Verbindungsstelle vom Brenner zum Resonator über die Flamme ist als Vierpol mit starker Dämpfung aufzufassen. In grober Annäherung dürfte etwa ein Ersatzschema nach Abb. 9 gelten. Für eine nähere Diskussion wird der Abschlußwiderstand β_{II} so angenommen, daß maximaler Leistungsübergang vorhanden, d. h. β_{II} konjugiert komplex zum Ausgangswiderstand ist. Wir vergleichen die Leistung im Belastungswiderstand β_I mit derjenigen im Ausgangswiderstand des Vierpols bei kurzgeschlossenen Ausgangsklemmen und setzen dabei wegen der großen Vierpoldämpfung den Eingangsstrom des Vierpols als konstant an. Das bedeutet zugleich, daß wir rechnen, als ob der innere Widerstand des Generators ∞ wäre. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Realteil des Ausgangswiderstands} &= R_3 \\ \text{Stromübersetzung bei Belastung} &= \left(\frac{I_0}{I_1} \right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{\omega C_2} \right)^2}{(2 R_3)^2} \end{aligned} \quad (21)$$

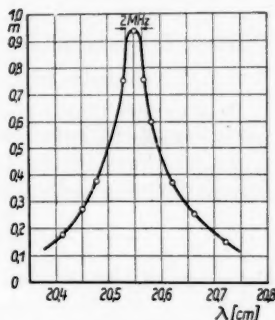


Abb. 8. Anpassungsmaß m des Resonators

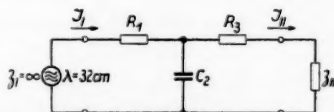


Abb. 9. Ersatz-Vierpol für die Verbindungsstelle vom Brenner zum Resonator über die Flamme

Leistung im Belastungswiderstand $I_{||}^2 R_3 = \frac{1}{(\omega C_2)^2 4 R_3} I_1^2$

$$\text{Stromübersetzung bei Kurzschluß } \left(\frac{I_{||K}}{I_1}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{\omega C_2}\right)^2}{\left(\frac{1}{\omega C_2}\right)^2 + R_3^2} \quad (21)$$

$$\text{Innere Leistung im Ausgangswiderstand } I_{||K}^2 R_3 = \frac{1}{(\omega C_2)^2 R_3} \frac{I_1^2}{\left(\frac{1}{\omega C_2 R_3}\right)^2 + 1}$$

Nun hat der Eingangswiderstand des Vierpols wegen der großen Dämpfung nahezu unabhängig vom Belastungswiderstand den Wert R_1 . Gehen wir damit in die Gleichung für die Leistung im Belastungswiderstand ein, so läßt sich hier die Eingangsleistung abspalten und wir erhalten

$$\frac{I_{||}^2 R_3}{I_1^2 R_1} = \frac{1}{(\omega C_2)^2 4 R_1 R_3} \ll 1. \quad (22)$$

Mit der plausiblen Annahme

$$R_3 \geq R_1 \quad (23)$$

folgt

$$\frac{1}{(\omega C_2)^2 R_3^2} \ll 1$$

und

$$I_{||K}^2 R_3 = \frac{1}{(\omega C_2)^2 R_3} I_1^2 = 4 I_{||}^2 R_3. \quad (24)$$

Das heißt, die innere Leistung im Ausgangswiderstand des Vierpols ist das 4fache der am Ausgang maximal entnehmbaren Leistung, wie bei einem einfachen Widerstand. Über diese Beziehung haben wir einen Zugang zu der inneren Leistung in dem Volumen, das von den Resonator erfaßt wird und aus dem auch die Rauschleistung ausgekoppelt ist. Das Ersatzschaltbild läßt sich übrigens anschaulich deuten, wenn wir gleichsetzen

R_3 = Teil der Plasmasäule im Innern des Resonators nahe dem Mittelleiter

R_1 = Rest der Säule, insbesondere das Stück außerhalb des Resonators, und Brennfleck

C_2 = verteilte Kapazität nach Masse zu.

Die geringe Leistung in R_3 ist nach den oben angestellten Rechnungen ohne weiteres verständlich. Man sieht weiter auch, daß ein erhöhtes Rauschen im Anodenfleck gleichfalls nur zu einem kleinen Bruchteil im Resonator wirksam werden kann und daher die beobachtete Rauschtemperatur kaum beeinflusst.

Praktisch wurde die entnehmbare Leistung nicht unmittelbar durch Herstellen der Leistungsanpassung bestimmt. Die Rückwirkung auf die Entladung war dazu zu stark. Die Auskopplung wurde so eingeregelt, daß nur etwa $N = 0,5 W$ für einen kalorimetrischen Leistungsmesser von 70Ω Widerstand abgegeben wurden. Anschließend wurde dann in bekannter Weise das dabei vorhandene Anpassungsmaß m ermittelt. Es wurde dazu an Stelle des Leistungsmessers eine kurzgeschlossene Leitung mit 70Ω Wellenwiderstand angeschlossen, an der im Abstand $\lambda/4$ vom Ende die Spannung U ab-

hängig von der ganzen Leitungslänge gemessen wurde. Es ist dann ähnlich wie bei einer Meßleitung

$$m = \frac{U_{\min}}{U_{\max}}. \quad (25)$$

Die entnehmbare Leistung N_a wird damit

$$N_a = N \frac{(m+1)^2}{4m}. \quad (26)$$

Die innere Leistung im erfaßten Flammenvolumen schließlich ist $4 N_a$.

6. Die Meßergebnisse: Trennung von thermischem und Schrotrauschen

Die Messungen wurden hauptsächlich mit Luft und Stickstoff als Flammengas durchgeführt, einige orientierende Messungen außerdem mit Kohlensäure.

Beim speisenden Hochfrequenz-generator wurde besonders darauf geachtet, daß keine Kipp-schwingungen auftraten, die möglicherweise ein Zusatzrauschen geben konnten. Ein leises, zischendes Geräusch der Flamme blieb auch bei völlig unmodulierter Generatorspannung bestehen. Es schien hauptsächlich aus dem Elektrodenfleck zu kommen. Weiter wurde durch Ändern der Generatorwellenlänge in einem Bereich von 3,5% gesichert, daß nicht etwa eine Harmonische in das Empfangsband fiel. Andererseits wurde auch ausgeschlossen, daß etwa die Eigendämpfung des Resonators einen merklichen Verlust an Rauschtemperatur verursachte. Es wurde für den Resonator ohne Flamme ein Resonanzwiderstand von 18 kΩ gemessen, der groß gegen die Widerstände bei brennender Flamme von höchstens 1 kΩ war. Die gemessenen Rauschtemperaturen lagen durchweg in der Nähe von 10000° K, waren also rund eine Größenordnung niedriger als die von Cobine und Wilbur angegebenen Elektronentemperaturen. Bei konstanter Einstellung des speisen-

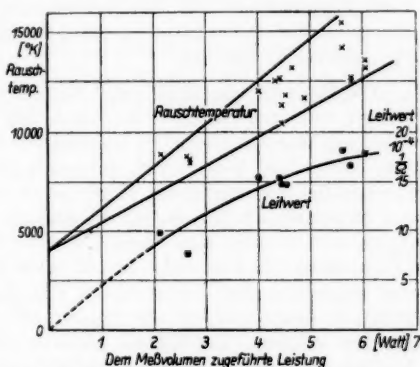


Abb. 10. Meßergebnisse an der Fackelentladung in Luft

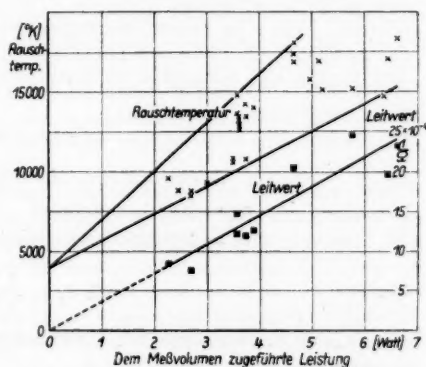


Abb. 11. Meßergebnisse an der Fackelentladung in Stickstoff

den HF-Generators zeigte sich eine Wirkung der Stärke des Gasstroms. Ähnlich wie beim Lichtbogen stieg die Temperatur bei stärkerem Gasstrom, d. h. stärkerer Kühlung, zunächst an. Nach einem Maximum trat schließlich wieder eine Temperaturabnahme ein. Die im folgenden beschriebenen Messreihen wurden mit konstantem Gasstrom aufgenommen, der durch eine eingeschaltete Blende mit Manometer kontrolliert wurde.

Abb. 10 zeigt für eine Fackel von 4 mm Länge in Luft die Rauschtemperatur T' und den Leitwert G_R abhängig von der Hochfrequenzleistung im Meßvolumen. Abb. 11 stellt die entsprechenden Messungen für Stickstoff dar. In beiden Fällen steigen Rauschtemperatur und Leitwert kräftig mit der Leistung an. Die Flamme änderte sich dabei hauptsächlich in der Weise, daß die Berührungsfläche zwischen dem Flammenkern und dem Resonator-Mittelleiter von praktisch Null auf den vollen Kernquerschnitt anstieg. Auch die Aureole wurde dabei kräftiger, sie interessierte aber weniger, da ihre Leitfähigkeit nach den Sondenmessungen sehr gering war. Die erhebliche Streuung der Meßpunkte ist hauptsächlich durch Unsicherheiten der Leistungsmessung bedingt.

Die Rauschtemperatur stellt natürlich einen Durchschnittswert über das erfaßte Volumen dar, das aber nach den geschilderten Beobachtungen praktisch mit der einigermaßen homogenen Spitze des Flammenkerns identisch sein sollte. Von besonderem Interesse ist nun die Aufteilung in Elektronentemperatur und wirksame Temperatur des Schroteffekts. Der Streubereich der Meßpunkte läßt sich, wie in Abb. 10 und 11 geschehen ist, ohne Zwang durch zwei Geraden einschließen, die bei $P_0 = 0$ die gemessene Gastemperatur abschneiden. Es liegt nahe, den linearen Anstieg der Rauschtemperatur durch das Schrotrauschen entsprechend der Formel (6) von Parzen und Goldstein zu deuten, indem alle Größen mit Ausnahme von P_0 als konstant angesehen werden. Tatsächlich änderte sich V trotz der verschiedenen großen Berührungsfläche zwischen Flammenkern und Resonatormittelleiter, die als Rekombinationsfläche wirkte, nur wenig. ϑ war Null und ω konstant. Aus den vorn dargestellten Überlegungen kann außerdem Konstanz von T_e und nahezu thermisches Gleichgewicht, d. h. auch Konstanz von n_e und z gefolgert werden. Leider ist dieser Deutungsversuch⁵⁴⁾ nicht haltbar. Man übersieht das an Hand einer anderen Form der Gl. (6), die mit den auch von Parzen und Goldstein benutzten Substitutionen erhalten wird

$$\frac{P_0}{V} = \frac{i^2}{z} \quad i = n_e e u_e \quad z = \frac{e^2 n_e}{z m_e} \quad (27)$$

i = Stromdichte im Plasma

m_e = Elektronenmasse

u_e = Driftgeschwindigkeit der Elektronen,

$$k T_e = \frac{1}{3} m_e v_{\text{eff}}^2 \quad (28)$$

v_{eff} = Effektivwert der thermischen Elektronengeschwindigkeit.

⁵⁴⁾ L. Mollwo, Vortrag Plasma-Tagung der Phys. Ges. i. d. DDR in Leipzig, Oktober 1956, Akademie-Verlag, Berlin, im Druck.

Es folgt

$$\frac{P_a}{\Delta f} = k T_e + k T_{\text{Schr}} = m_e \left\{ \frac{1}{3} v_{\text{eff}}^2 + u_e^2 \left[1 + \frac{2}{1 + \left(\frac{\omega}{z} \right)^2} \right] \right\}. \quad (29)$$

Wie sich zeigen wird, war bei den benutzten Bedingungen $\omega \ll z$, so daß näherungsweise gilt

$$\frac{P_a}{\Delta f} = m_e \left\{ \frac{1}{3} v_{\text{eff}}^2 + 3 u_e^2 \right\} \quad (30)$$

$$\frac{v_{\text{eff}}^2}{u_e^2} = 9 \frac{T_e}{T_{\text{Schr}}}.$$

Aus Abb. 10 entnimmt man für $P_0 = 6$ W mit $T_e = 4000^\circ$ den Wert $T_{\text{Schr}} = 10000^\circ$ und erhält

$$\frac{v_{\text{eff}}^2}{u_e^2} = 3,6.$$

An Stelle von u_e kann man noch das Mittel aus den Endwerten der gerichteten Geschwindigkeit u_{max} während der freien Flugzeit τ einführen. Es wird unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der freien Flugzeiten

$$dP = e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} d\frac{\tau}{\tau_0}, \quad (31)$$

die auch von Parzen und Goldstein benutzt ist,

$$\overline{u_{\text{max}}^2} = 2 u_e^2. \quad (32)$$

Man findet dann für das Zahlenbeispiel

$$\frac{v_{\text{eff}}^2}{u_{\text{max}}^2} = \frac{v_{\text{eff}}^2}{2 u_e^2} = \frac{9}{2} \frac{T_e}{T_{\text{Schr}}} = 1,8. \quad (33)$$

Das bedeutet eine Energiezufuhr während der freien Flugzeit, die nahezu gleich der mittleren thermischen Energie ist. Nach Ornstein und Brinkmann⁵⁵⁾ kann in solch einem Fall kein thermisches Gleichgewicht vorhanden sein. Denn der Energiefluß nach außen wird dabei vergleichbar mit der im Plasma fluktuierenden Leistung, während im Gleichgewichtsfall nur ein verschwindend kleiner Bruchteil dieser Leistung entweichen darf⁵⁶⁾. Man kommt also auf einen Widerspruch zu der vorher gemachten Annahme thermischen Gleichgewichts, die gewählte Aufteilung der ganzen Rauschtemperatur T' ist nicht richtig.

Ein zweiter Weg für die Aufteilung besteht darin, mit Hilfe der Formel von Parzen und Goldstein die Äquivalenttemperatur des Schrottrauschens zu berechnen. Dies gelingt unter Benutzung der Leitwertmessungen. Wir betrachten wiederum die Luftfackel bei der größten Leistung 6 W, wo im Gegensatz zu kleineren Leistungen der Flammenkern seine zylindrische Form von 1,2 mm Durchmesser bis zum Resonatormittelleiter beibehält. Die für die ausgekoppelte Leistung wirksame Kernlänge schätzen wir auf

⁵⁵⁾ L. S. Ornstein u. H. Brinkman, *Physica* **1**, 797 (1934).

⁵⁶⁾ W. Weizel u. R. Rompe, *Theorie elektrischer Lichtbögen und Funken*. J. A. Barth Verlag, Leipzig 1949, S. 63.

2,5 mm, d. h. etwas kürzer als den Abstand Innenleiter—Außenleiter von 3 mm. Aus dem Leitwert von $18 \cdot 10^{-4} \text{ 1}/\Omega$ folgt eine Leitfähigkeit

$$\kappa = 4,0 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\Omega \text{ cm}}.$$

Die mittlere Stoßzahl z der Elektronen errechnet sich nach bekannten Beziehungen aus der Gastemperatur von 4000° K , einer durch vorläufige Abschätzungen gefundenen Elektronentemperatur von $T_e = 13500^\circ \text{ K}$ und dem hierzu gehörenden Bremsquerschnitt der Neutralteilchen von $7 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$ zu

$$z = Q_0 n_0 \bar{v}_e = 9,3 \cdot 10^{10} \frac{1}{s} \quad (34)$$

n_0 = Dichte der Neutralteilchen

\bar{v}_e = mittlere Elektronengeschwindigkeit.

Die mittlere Elektronendichte n_e folgt aus κ und z

$$n_e = \kappa \frac{m_e}{e^2} z = 1,32 \cdot 10^{13} \frac{1}{\text{cm}^3}. \quad (35)$$

Die äquivalente Temperatur des Schrottrauschens T_{Schr} wird damit

$$T_{\text{Schr}} = \frac{1}{k} \frac{P_0}{V n_e z} \left[1 + \frac{2}{1 + \left(\frac{\omega}{z} \right)^2} \right] \approx \frac{3}{k} \frac{P_0}{V n_e z} = 380^\circ, \quad (36)$$

so daß tatsächlich $T_e + T_{\text{Schr}} \approx 14000^\circ$, wie gemessen wurde. Diese Temperaturen führen auf den um 2 Größenordnungen anderen Quotienten

$$\frac{v_{\text{eff}}^2}{u_{\text{max}}^2} = \frac{9}{2} \frac{T_e}{T_{\text{Schr}}} = \frac{9}{2} \frac{13500}{380} = 160.$$

Die Energiezufuhr während der freien Flugzeit und damit auch die mittlere Energieabgabe der Elektronen je Stoß im stationären Zustand ist nur noch ein kleiner Bruchteil der thermischen Elektronenenergie. Dieser Quotient, den wir ι nennen wollen, wird gewöhnlich aus der Gleichgewichtsbedingung der Leistungen abgeleitet:

$$e E u_e = \iota \frac{m}{2} v_{\text{eff}}^2 z \quad (37)$$

E = elektrische Feldstärke.

Außerdem gilt, wie sich leicht aus (27) ableiten läßt,

$$u_e = \frac{e}{m} E z. \quad (38)$$

Es folgt

$$\iota = \frac{2 u_e^2}{v_{\text{eff}}^2} \quad (39)$$

in Übereinstimmung mit der oben angegebenen Ableitung der zugeführten Energie.

Es überrascht, daß bei $\iota = \frac{1}{160}$ die angesetzte hohe Elektronentemperatur $T_e = 13500^\circ$, also eine beträchtliche Abweichung vom thermischen Gleichgewicht vorhanden sein soll. Versucht man jedoch abzuschätzen,

welche Elektronentemperatur notwendig ist, um die für $\iota = \frac{1}{160}$ notwendige Anzahl von unelastischen Stößen, die z. B. zur Dissoziation führen, zu liefern, so erscheint $T_e = 13500^\circ$ recht plausibel. Schätzt man andererseits ab, welche Häufigkeit die verschiedenen Rekombinationsprozesse der dissoziierten Moleküle haben, so kommt man zu dem Schluß, daß die Elektronendichte $n_e = 1,32 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ nicht dafür ausreicht, daß der Dreierstoß mit einem Elektron als 3. Partner auch nur annähernd in gleicher Anzahl auftritt wie der Dissoziationsvorgang durch Elektronenstoß. Thermisches Gleichgewicht ist dann nicht zu erwarten. Die Rekombinationsenergie wird fast ausschließlich im Dreierstoß an neutrale Moleküle⁵⁷⁾ oder äußere Rekombinationsflächen abgegeben. Erst bei höherem Ionisationsgrad, wie er im Lichtbogen auftritt, stellt sich thermisches Gleichgewicht ein, weil dann einerseits die gerichtete Geschwindigkeit u_e und damit ι kleiner werden, andererseits die Anzahl der Dreierstöße mit einem Elektron zunimmt.

Eine gewisse quantitative Kontrolle dieser Überlegungen erlauben die Tafeln über Elektronen-Energien in Gasen, die auf Grund der Messungen von Townsend, Bailey und ihren Schülern zusammengestellt und z. B. bei Loeb⁵⁸⁾ abgedruckt sind. Für Stickstoff sind außerdem neue gut übereinstimmende Messungen von Crompton und Sutton vorhanden⁵⁹⁾. Man findet dort den Zusammenhang zwischen ι (bei Loeb mit f bezeichnet) und $\eta = \frac{T_e}{288}$, $\iota = \frac{1}{160} = 6,25 \cdot 10^{-3}$ wird danach erreicht für Stickstoff bei $\eta = 45,7$, d. h. 13200° , für Sauerstoff bei $\eta = 49,0$, d. h. 14100° und außerdem in der Gegend von $\eta = 5,5$ d. h. 1580° , was in unserem Fall unmöglich ist. In der Tafel für Luft haben bei Loeb alle Zahlenwerte mit Ausnahme eines scheinbar herausfallenden Werts falsche Kommastellung. Berichtigt man das, so kommt man für Luft auf $\eta = 107$, $T_e = 30800^\circ$. Für Luft existieren übrigens alte Messungen von Townsend und Tizard⁶⁰⁾, die mit den neuen Messungen von Huxley und Zaazou⁶¹⁾ in der Drift-, aber nicht in der thermischen Geschwindigkeit übereinstimmen und auf $\eta = 42$, $T_e = 12100^\circ$ führen. Selbstverständlich können diese Zahlen nur einen rohen Anhalt geben, da alle Messungen bei geringem Druck und außerdem bei sehr geringen Strömen ausgeführt sind. Im großen und ganzen ist aber die Anwendbarkeit der Meßergebnisse bei höherem Druck und größeren Strömen durch die Untersuchungen von Riemann⁶²⁾ an Entladungslawinen bei etwa 300 Torr und durch Höchstfrequenzmessungen von Varnerin und Brown⁶³⁾ doch ziemlich gesichert. Es wird also sehr wahrscheinlich, daß die angenommene Elektronentemperatur $T_e = 13500^\circ$ richtig und die Abweichung von der Gastemperatur von 4000° reell ist.

⁵⁷⁾ G. Herzberg, Spectra of Diatomic Molecules. D. v. Nostrand Co., Inc., New York 1951, p. 402.

⁵⁸⁾ L. B. Loeb, Basic Processes of Gaseous Electronics. Univ. of Cal. Press, Berkeley and Los Angeles 1955, p. 323.

⁵⁹⁾ R. W. Crompton u. D. J. Sutton, Proc. Phys. Soc. (London) A **215**, 467 (1952).

⁶⁰⁾ J. S. Townsend u. H. T. Tizard, Proc. Roy. Soc. A **88**, 336 (1913); J. S. Townsend, Electrons in Gases. Hutchinson's Scient. and Techn. Publ., London 1947, p. 72.

⁶¹⁾ L. G. H. Huxley u. A. A. Zaazou, Proc. Roy. Soc. A **196**, 402 (1949).

⁶²⁾ W. Riemann, Z. Physik **122**, 216 (1944).

⁶³⁾ L. J. Varnerin u. S. C. Brown, Physic. Rev. **79**, 946 (1950).

Der Abfall der gemessenen Rauschtemperatur bei Leistungen unter 6 W ist jetzt keinesfalls mehr durch das Schrottrauschen zu erklären. Die Elektronentemperatur sollte nach den sonstigen Erfahrungen an Glimmentladungen bei niedrigem Druck in einem Entladungsrohr bei abnehmender Leistung sogar leicht ansteigen (vgl. z. B. Granowski⁶⁴). Es wurde vermutet, daß der Abfall entsteht, weil bei kleinerer Leistung der Flammenkern nicht mehr in Berührung mit dem Mittelleiter des Resonators ist. Hier ist dann mit dem Flammenkern von relativ niedrigem Widerstand und hoher Temperatur ein Volumen mit relativ hohem Widerstand und niedriger Temperatur elektrisch in Reihe geschaltet. Die wirksame Rauschtemperatur T_W ist in einem solchen Fall

$$T_W = T_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2} + T_2 \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (40)$$

Da die Zunahme des Zusatzwiderstands R_2 bei abnehmender Temperatur T_2 sehr stark ist, kann so im Prinzip eine beträchtliche Änderung von T_W eintreten. Man sieht zugleich, daß eine Schicht erhöhter Temperatur kaum stören kann. Aber auch bei abfallender Temperatur T_2 ist der Effekt begrenzt, da parallel zu R_2 Kapazitäten wirksam sind, die in zunehmendem Maße für den Stromschluß maßgebend werden und ohne Einfluß auf die Rauschtemperatur sind.

Zur experimentellen Kontrolle wurden die Versuchsbedingungen nach verschiedenen Richtungen variiert. Die Ergebnisse sind in Tab. 1 zusammengestellt, wobei jeweils über eine Anzahl von gleichartigen Messungen gemittelt ist.

Tabelle 1
Messungen an der Luftfackel

Spalte	1	2	3	4	5
Ganze Länge der Entladungsstrecke mm	4	4	4	2,5	2,5
Teil-Länge im Resonator mm	3	3	1,5	1,5	1,5
Sender-Anodenstrom als Maß für die zugeführte Leistung mA	205	155	205	200	155
Leistung im Meßvolumen W	4,1	2,7	3,3	4,0	3,1
Widerstand Ω	470	1000	500	400	590
Rauschtemperatur °K	13900	8700	13300	17400	12800

Die Spalten 1 und 2 entsprechen den Versuchsbedingungen bei Abb. 10, dabei ist Spalte 1 neu gemessen, Spalte 2 übernommen. Für die Messungen Spalte 3 bis 5 wurde das Stück der Entladungsstrecke im Innern des Resonators verkürzt, indem auf den Resonator-Mittelleiter ein zylindrischer Aufsatz von 1,5 mm Höhe und 6 mm Durchmesser aufgesetzt wurde. Die Spalten 4 und 5 wurden bei unverändertem Brenner gemessen, so daß die ganze Länge der Entladungsstrecke nur noch 2,5 mm war; Spalte 5 gilt für gleiche zugeführte Leistung wie Spalte 2, ebenso gilt Spalte 4 für gleiche zugeführte Leistung wie Spalte 1. Für Spalte 3 wurde der Innenleiter des Brenners ver-

⁶⁴) W. L. Granowski, Der elektrische Strom im Gas. Akademie-Verlag, Berlin 1955, S. 407.

kürzt, so daß die ganze Entladungslänge wie zuerst 4 mm betrug, die zugeführte Leistung hatte die gleiche Größe wie bei Spalte 1.

Es zeigt sich, daß die 3 Rauschtemperaturen für die Spalten 1, 3 und 5 nahe übereinstimmen, d. h. für die Fälle, für die der Quotient zugeführte Leistung/ganze Entladungslänge etwa konstant ist. Für Spalte 2 ist die Temperatur kleiner und zugleich auch der Quotient; für Spalte 4 ist die Temperatur größer und zugleich auch der Quotient. Der vermutete Einfluß einer kühleren Schicht bei Spalte 2 ist danach wohl kaum allein ausschlaggebend, es scheint ein Effekt der Leistungsdichte hinzuzukommen, der das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie bei Gleichstrom-Glimmentladungen. Hierbei dürfte wesentlich mitsprechen, daß die Fackel ohne äußere Hülle, d. h. ohne Bindung an einen festen Durchmesser brennt und vor allem ohne Gegenelektrode auskommt, d. h. nicht an eine feste Länge und eine Berührungsfläche mit der Gegenelektrode gebunden ist. Es ist daher eine Beeinflussung der Elektronentemperatur durch Wandeffekte besonders am Resonator-Mittelleiter in Betracht zu ziehen. Die gemessenen Leistungen im Meßvolumen und Widerstände in Tab. 1 zeigen etwa den erwarteten Verlauf. Eine eingehendere Diskussion ist wegen der mäßigen Meßgenauigkeit und der mangelnden Kenntnis der wahren geometrischen Dimensionen zu den gemessenen Widerständen nicht möglich.

7. Diskussion der gefundenen Plasmadaten

Überblickt man die gefundenen Plasmadaten für den Kern der Elektronenfackel, so bestätigt sich im großen und ganzen die Ähnlichkeit mit einer stromstarken Glimmentladung, die von Cristescu und Grigorovici festgestellt wurde. Die Leitfähigkeit κ des Plasmas erlaubt die Berechnung der Eindringtiefe für die Meßfrequenz, die mit 6,5 mm groß gegen den Radius des Flammenkerns ist. Die Stoßfrequenz z ist groß gegen die Betriebsfrequenz, so daß die für Gleichstrombetrieb abgeleitete Beziehung von Parzen und Goldstein noch anwendbar ist. Selbst für die Meßfrequenz von 1500 MHz haben wir noch

$$\left(\frac{z}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{9,3 \cdot 10^{10}}{2\pi \cdot 1500 \cdot 10^6}\right)^2 = 97.$$

Damit läßt sich nachrechnen, daß das Plasma sich wie ein schlechter Leiter verhält. Setzt man nämlich die bekannte Beziehung für die komplexe Dielektrizitätskonstante eines Plasmas mit verschwindender Raumladung im elektromagnetischen Wirbelfeld an^{(65) (66)},

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - j\omega z} = 1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{\omega}\right)^2} - j \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \frac{\frac{z}{\omega}}{1 + \left(\frac{z}{\omega}\right)^2} \quad (41)$$

ε_0 = Dielektrizitätskonstante im leeren Raum

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{m_e \varepsilon_0}} = \text{Elektronen-Plasmafrequenz,}$$

⁽⁶⁵⁾ R. Rompe u. M. Steenbeck, Der Plasmazustand der Gase in „Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften“ 18, J. Springer, Berlin 1939.

⁽⁶⁶⁾ S. K. Mitra, The Upper Atmosphere, The Asiatic Society, Calcutta Sec. Ed. S. 625.

so kommt man mit

$$\left(\frac{z}{\omega}\right)^2 \gg 1, \quad (42)$$

wie es hier vorliegt, auf

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx 1 - \left(\frac{\omega_0}{z}\right)^2 - j \frac{\omega_0^2}{\omega z} \approx 1 - j \frac{\omega_0^2}{\omega z}. \quad (43)$$

Der Realteil von $\varepsilon/\varepsilon_0$ wird also praktisch 1, während der Imaginärteil einer Leitfähigkeit entspricht, die man übersichtlicher in der Form schreibt

$$\kappa = j \omega \varepsilon_0 \operatorname{Im} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) = \frac{\omega_0^2}{z} \varepsilon_0 = \frac{e^2 n_e}{m_e z}. \quad (44)$$

Diese Beziehung ist auch oben benutzt worden. Schließlich läßt sich noch die Plasmafrequenz unter Berücksichtigung der Stöße berechnen. Wenn man sich auf den ebenen Fall beschränkt, geringen Ionisationsgrad voraussetzt, die Bewegung der positiven Ionen gegenüber der Elektronenbewegung vernachlässigt und weiter annimmt, daß auf die Elektronen keine Kräfte infolge von magnetischen Feldern oder Diffusionseffekten wirken, so genügt es, folgende 3 Beziehungen anzusetzen:

1. Die Poissonsche Gleichung für die Raumladung

$$e(n_i - n_e) = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}; \quad (45)$$

2. Die Maxwellsche Gleichung

$$-e n_e u_e = i - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}; \quad (46)$$

3. Die Bewegungs-Gleichung

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + z u_e = -\frac{e}{m_e} \mathcal{G} \quad (47)$$

$n_i = \bar{n}_e$ = Zahl der positiven Ionen in der Raumeinheit

$i = \operatorname{rot} \mathfrak{H}$ = Gesamtstromdichte

$z u_e$ = mittlere Änderung der gerichteten Elektronengeschwindigkeit in der Zeiteinheit durch Stöße, folgt aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung (31) der freien Flugzeiten (Allis⁶⁷).

Die Lösung führt auf eine Kreisfrequenz ω_z der freien Schwingungen

$$\omega_z^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2 \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{e^2 n_i}{m_e \varepsilon_0} \quad (48)$$

und auf eine Resonanzüberhöhung ϱ bei der Plasmafrequenz ω_0

$$\varrho = \frac{\omega_0}{z}. \quad (49)$$

Für die gefundenen Zahlenwerte ergibt sich mit (44)

$$\varrho = \frac{\omega_0}{z} = \sqrt{\frac{\kappa}{z \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4,0 \cdot 10^{-2}}{9,3 \cdot 10^{10} \cdot 0,886 \cdot 10^{-13}}} = 2,2.$$

⁶⁷ W. P. Allis, Motions of Ions and Electrons in „Handbuch der Physik“ 21, Gl. (11.1), (11.2), (12.7) und (31.5), Springer-Verlag, Berlin 1956.

Bei dieser geringen Resonanzüberhöhung ist mit dem Auftreten von Plasmaschwingungen nicht zu rechnen. Die Frequenz f_z der freien Schwingungen würde im übrigen sein

$$f_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2} = \frac{z}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{z}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{9,3 \cdot 10^{16}}{2\pi} \sqrt{2,2^2 - \frac{1}{4}} = 3,17 \cdot 10^{10} \text{ Hz},$$

also groß gegen die Meßfrequenz von $0,15 \cdot 10^{10}$ Hz. Die gleiche Beziehung (48) für ω_z ergibt sich aus einer wesentlich allgemeineren Rechnung von Gross und Krook⁶⁸), wenn man für die freien Schwingungen nur Kreisfrequenzen $\omega_z \approx \omega_0$ berücksichtigt. Unter dieser Voraussetzung wird eine Phasengeschwindigkeit der Plasmawellen erhalten, die sehr groß gegen die thermische Elektronengeschwindigkeit bzw. die ihr entsprechende Elektronen-Schallgeschwindigkeit ist. Wie in der elementaren Rechnung kommt also eine gleichphasige Schwingung der Elektronen heraus. Außerdem muß vorausgesetzt werden, daß die Wellenlänge im Plasma groß gegen die Debye-Länge der Elektronen ist, was unter den betrachteten Bedingungen erfüllt ist. Gross und Krook schreiben die Bestimmungsgleichungen für ω_z in der Form

$$\omega_z^2 + j \omega_z z - \omega_0^2 = 0,$$

bei einem Schwingungsansatz mit $e^{-j\omega t}$ abweichend von dem in dieser Arbeit sonst benutzten Ansatz mit $e^{+j\omega t}$.

Die gleiche Form findet sich auch bei Finkelnburg und Maecker⁶⁹). Der Einfluß ungleichmäßiger Elektronendichte in einem begrenzten, zylindrischen Plasma auf die Plasmafrequenz ist kürzlich von Esprester und Haug⁷⁰) theoretisch untersucht worden. Danach ist äußerstenfalls eine Abnahme der Elektronen-Plasmafrequenz auf die Hälfte zu erwarten. Es ist dabei allerdings nicht die Frequenz der freien Schwingungen ω_z betrachtet, sondern die nahe benachbarte Frequenz ω_r , für die der Realteil der Dielektrizitätskonstante Null wird. Man findet aus den Gln. (45–47) für ein Plasma mit Raumladungen im Kondensatorfeld

$$\frac{\epsilon_0}{\epsilon} = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_j^2 - j \omega z}$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 - \frac{\omega_j^2}{\omega^2 - j \omega z},$$

also die gleiche Beziehung wie für ein Plasma mit verschwindender Raumladung im elektromagnetischen Wirbelfeld. Für $\text{Re}(\epsilon) = 0$ ergibt sich die Kreisfrequenz ω_r

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - z^2.$$

Diese Beziehung folgt daher auch aus den Formeln von Esprester und Haug für ein homogenes Plasma. Die zugehörige Leitfähigkeit κ , die aus dem Imaginärteil von ϵ folgt, ist übrigens

$$\kappa = z \epsilon_0 \frac{\omega_r^2 + z^2}{\omega^2 + z^2} = \left(\frac{z}{\omega_0}\right)^2 \frac{\omega_r^2}{\epsilon_0 \omega^2 + z^2}.$$

⁶⁸) E. P. Gross u. M. Krook, Physic. Rev. **102**, 593 (1956), Abschnitt 7.

⁶⁹) W. Finkelnburg u. H. Maecker, Elektrische Bögen und thermisches Plasma in „Handbuch der Physik“ **22**, 357, Gl. (67.12), Springer 1956.

⁷⁰) A. Esprester u. A. Haug, Z. angew. Physik **7**, 180 (1955).

Für $\left(\frac{z}{\omega_0}\right)^2 \ll 1$ und $\omega = \omega_r$ wird die Leitfähigkeit also wesentlich kleiner als sie nach der für $\left(\frac{z}{\omega}\right)^2 \gg 1$ geltenden Gl. (44) berechnet wird.

Der Vollständigkeit halber sei hier noch angemerkt, daß die Bewegungsgleichung (47) auch bei der Herleitung der Beziehung für ε (41) benutzt wird. Die gemachte Voraussetzung einer Verteilung der freien Flugzeiten nach (31) steckt also auch in den Gln. (27) für α und (38) für u_e . Übrigens führt der Flugzeitenansatz (31) bei den vorliegenden Bedingungen zwangsläufig auf eine Maxwellverteilung der thermischen Elektronengeschwindigkeiten, wie sie Parzen und Goldstein angenommen haben (vgl. Granowski⁷¹). Durchweg ist bei den Rechnungen die Voraussetzung geringer Elektronen-Wechselwirkung gemacht. Mit Hilfe der von Allis⁷²) angegebenen Beziehungen läßt sich nachrechnen, daß für die gefundenen Plasmadaten diese Annahme gerade noch zutreffend ist; die Elektronendichte liegt unterhalb des kritischen Werts.

Das interessante Endergebnis der Untersuchungen ist:

1. Die Elektronentemperatur ist praktisch gleich der gemessenen Rauschtemperatur.
2. Die Elektronentemperatur von etwa 13500° K ist erheblich höher als die Gastemperatur von etwa 4000°.
3. Die gefundene Elektronentemperatur stimmt recht gut mit dem Wert überein, der dem ermittelten Stoßverlust $\iota = \frac{1}{160}$ bei einer Gleichstrom-Glimmentladung in deren Existenzbereich zugeordnet ist.

Für den Entladungskern der Elektronenfackel muß danach ein Zustand angenommen werden, der trotz des vorhandenen Atmosphärendrucks nicht der Lichtbogensäule sondern der Säule einer Glimmentladung ähnlich ist und aus diesem Grunde eine recht erhebliche Abweichung vom thermischen Gleichgewicht aufweist. Dabei betrachten wir als charakteristisch für die Lichtbogensäule eine hohe Elektronendichte, einen kleinen Quotienten Feldstärke/Gasdruck und nahezu thermisches Gleichgewicht, für die Glimmentladungssäule niedrige Elektronendichten, große Quotienten Feldstärke-Gasdruck und beträchtliche Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht, wobei eine stetige Reihe von Zwischenstufen zwischen diesen extremen Formen denkbar ist. Bei Gleichstrom ist für Atmosphärendruck die Glimmsäule meist nicht stabil, weil beim Übergang zu höherer Elektronendichte der Widerstand der Entladung so rapid absinkt (Ausbildung der Lichtbogensäule), daß die üblicherweise vorgeschalteten Widerstände den Prozeß nicht bremsen können. Gambling und Edels⁷³) haben an einer Gleichstrom-Entladung im Wasserstoff von Atmosphärendruck einen plötzlichen Umschlag von der Glimmsäule in die Lichtbogensäule beobachtet, der nichts mit der Ausbildung der Bogenkathode aus der Glimmkathode zu tun hatte, sondern

⁷¹) W. L. Granowski, Der elektrische Strom im Gas. Akademie-Verlag, Berlin 1955, S. 276.

⁷²) W. P. Allis, Motions of Ions and Electrons in „Handbuch der Physik“ 21, Gl. (54.4), Springer-Verlag, Berlin 1956.

⁷³) W. A. Gambling u. H. Edels, Nature 177, 1090 (1956), Brit. J. appl. Phys. 7, 376 (1956).

bereits bei einem kleineren Strom stattfand. Grotrian⁷⁴⁾ andererseits hat in dem von ihm untersuchten Strombereich an Stickstoff und Wasserstoff wohl den Übergang von der Glimmkathode zur Bogenkathode, aber keine auffälligen Änderungen an der Säule gefunden. Der Elektrodenfleck der Fackelentladung zeigt völlig das gleiche Aussehen wie die von Grotrian beschriebene Glimmkathode. Bei der hochfrequenten Fackelentladung tritt an die Stelle des Vorwiderstandes die Kapazität der Plasmasäule gegen die Umgebung. Der stationäre Zustand ist etwa bei Bedingungen zu erwarten, wo der Blindwiderstand der Kapazität den Wirkwiderstand der Entladung überschreitet. Wegen der vektoriellen Addition der beiden Widerstände ist ein weiterer Abfall des Wirkwiderstandes fast ohne Einfluß auf den Gesamtwiderstand und damit auf den Strom. Da die Widerstandsabnahme der Entladung nur durch eine Stromsteigerung zustande kommen kann, ändern sich die Entladungsbedingungen nicht weiter.

An der untersuchten Fackelentladung war bei 6 W Leistung für eine Länge von 2,5 mm ein Leitwert von $18 \cdot 10^{-4} \text{ 1}/\Omega$ gefunden worden. Der Widerstand für die ganze Länge von 4 mm ist danach 890Ω . Die Kapazitätsberechnung gelingt mit Hilfe der Größe ξ nach Abb. 2. Es ist nämlich die Kapazität je Längeneinheit C_l auf Grund der Theorie der Drahtwellen⁷⁵⁾

$$C_l = 2 \pi \epsilon_0 \frac{\xi H_1^{(1)}(\xi)}{H_0^{(1)}(\xi)},$$

wobei für sehr kleines ξ die Näherung gilt

$$\frac{\xi H_1^{(1)}(\xi)}{H_0^{(1)}(\xi)} \approx \frac{\xi \left(-\frac{1}{\xi}\right)}{\ln \xi + C - \ln 2 - j \frac{\pi}{2}} \approx \frac{1}{\ln \frac{1}{|\xi|}}.$$

Mit der Fackelleitfähigkeit $\kappa = 4 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\Omega \text{ cm}}$ folgt aus Abb. 2 $\xi = 0,10$. Der Blindwiderstand der Kapazität C_l je Längeneinheit ergibt sich zu

$$\frac{1}{\omega C_l} = \frac{\ln \frac{1}{|\xi|}}{\omega 2 \pi \epsilon_0} = 703 \Omega,$$

der Blindwiderstand für die wirkliche Länge von 4 mm wird

$$\frac{1}{0,4 \omega C_l} = 1760 \Omega.$$

Der stationäre Zustand liegt also tatsächlich an der erwarteten Stelle. Sehr interessant ist noch die Feststellung, daß die Kapazität mit steigender Leitfähigkeit, d. h. kleiner werdendem ξ abnimmt, so daß der Blindwiderstand zunimmt. Dieser Effekt verstärkt die Stabilisierung der Entladung bei geringer Leitfähigkeit und Elektronendichte.

Die Wellenausbreitung längs des Plasmakanals ist übrigens im vorliegenden Fall, wie man aus Abb. 2 und 3 sieht, charakterisiert durch einen Wert von $|\eta|$, der etwas kleiner ist als der Wert von $|\xi|$, und durch einen Winkel

⁷⁴⁾ W. Grotrian, Ann. Physik 47, 141 (1915).

⁷⁵⁾ W. O. Schumann, Elektrische Wellen. C. Hanser Verlag, München 1948, S. 259.

$\varphi_\eta \approx 0$. Die Abklingstrecke $L_D \approx 6$ mm, die schon oben benutzt wurde, stimmt mit der Eindringtiefe 6,5 mm praktisch überein. Außerdem ist nach Abb. 4 die Wellenlänge $\lambda_D = 6,8$ cm, also gegen die Vakuumwellenlänge $\lambda = 32$ cm, mit der die Fackel betrieben wurde, erheblich verkürzt. Sämtliche Bedingungen entsprechen damit der zuerst von Hondros⁷⁶⁾ angegebenen Lösung der Drahtwellengleichung, die üblicherweise von der Sommerfeldschen Lösung unterschieden wird, indem man von Nebenwellen und Hauptwellen spricht. Die Sommerfeldsche Lösung ist dabei durch sehr kleines $|\xi|$ und ein $|\eta|$ gekennzeichnet, das einen großen Bereich überstreichen kann, aber in jedem Fall groß gegen $|\xi|$ ist. Man sieht aus den Abb. 2 und 3, daß die beiden Lösungen jedenfalls bei kleinem α nichts weiter als Ausschnitte aus einem viel weiteren Gebiet von Lösungen darstellen.

Überraschenderweise blieb die Fackel auch dann, wenn sie nicht frei im Raum sondern bis zu einer Gegenelektrode brannte, praktisch in dem gleichen Zustand. Offenbar hat das den Grund, daß nach wie vor die Kapazität zur Umgebung weitgehend für die Schließung des Stromes maßgebend ist. Dabei ist von Bedeutung, daß die Gegenelektrode erst dann wirklich galvanisch Strom aufnimmt, wenn sich dort bei großer Leistung und kleiner Entladungslänge ein Elektrodenfleck ähnlich wie an der Brenner-Elektrode bildet³³⁾. Man muß wohl auch bei manchen anderen Hochfrequenzentladungen annehmen, daß sie sich in analoger Weise stabilisieren; bei der elektrodenlosen Ringentladung z. B. spielt die Induktivität des Plasmakanals eine entscheidende Rolle. Bei Gleichstrom dagegen stellt sich normalerweise bei Atmosphärendruck ein ausgesprochener Lichtbogen ein. Hierdurch wird verständlich, daß der Vergleich von Fackel und Gleichstromentladung in Abschnitt 3, der thermisches Gleichgewicht vermuten ließ, nicht zutreffend ist.

Es läßt sich aber sehr wohl der Anschluß an die untersuchten Gleichstromentladungen im Übergangsgebiet Glimmentladung—Bogen bei Atmosphärendruck herstellen. Grottrian⁴⁾ hat Lichtbögen großer Bogenlänge und hoher Spannung bis zu Strömen von 0,1 A herunter gemessen. Der Spannungsgradient in der Säule war dabei in Luft nach der angegebenen Interpolationsformel 337 V/cm. Gambling und Edels⁷⁷⁾ haben an einer ausgesprochenen Glimmentladung in Luft bei 0,1 A etwas verschiedene Gradienten von 350 V/cm bei Wolfram-Elektroden und von 450 V/cm bei Kupfer-Elektroden gefunden. Die Stromdichte in der Säule war dabei etwa 50 A/cm² und sank bis auf 20–30 A/cm² bei 0,02 A. Für die Fackel in Luft bei 6 W Leistung erhält man aus den oben angegebenen Zahlen leicht eine Feldstärke von 230 V/cm bei einer Stromdichte von 9,2 A/cm² und einem Gesamtstrom von 0,104 A. Die Feldstärken stimmen in Anbetracht der nicht besonders genauen Hochfrequenzmessung brauchbar überein. Die Hochfrequenzfeldstärke wird durch die zahlreichen Messungen von Cristescu und Grigorovici³²⁾ an der Luftfackel im Frequenzbereich 10–70 MHz bestätigt, die bei Strömen zwischen 50 und 100 mA auf Feldstärken von etwa 200 V/cm führen. Auch an normalen, zweipoligen Hochfrequenzentladungen sind von Solnjev und Dmitriewa⁷⁸⁾ fast die gleichen Feldstärken gefunden worden, nämlich bei 35 MHz und nicht

⁷⁶⁾ D. Hondros, Ann. Physik **30**, 905 (1909).

⁷⁷⁾ W. A. Gambling u. H. Edels, Brit. J. appl. Phys. **5**, 36 (1954).

⁷⁸⁾ C. S. Solnjev u. M. M. Dmitriewa, J. exp. theor. Phys. **29**, 651 (1955).

näher angegebenen, aber sicher geringen Strömen etwa 220 V/cm für Luft, 200 V/cm für Stickstoff von Atmosphärendruck. Die gefundene Hochfrequenz-Stromdichte liegt beträchtlich unter dem Wert von Gambling und Edels, und nahe bei der kathodischen Stromdichte von 8,5 A/cm², die v. Engel, Seeliger und Steenbeck⁷⁹⁾ an der Glimmentladung in Luft von Atmosphärendruck gemessen haben und die mit der Gültigkeit der Ähnlichkeitsgesetze bis zum Atmosphärendruck gut verträglich ist, wenn man die Unterschiede der Gastemperatur berücksichtigt. Auch Gambling und Edels haben etwa diese kathodische Stromdichte erhalten. Die Säulenstromdichte kann aber offenbar sehr verschiedene Werte annehmen. Thoma und Heer⁸⁰⁾ haben an der Glimmsäule in Luft bei 1 A etwa 32 A/cm² gemessen, und v. Engel⁸¹⁾ fand an der Lichtbogensäule für Ströme von 5 A sogar nur Stromdichten von 9 A/cm² und 2 A/cm² je nach dem Durchmesser des umhüllenden Wirbelrohrs; dabei fiel die Stromdichte mit abnehmendem Strom, aber nicht so stark wie bei Gambling und Edels. An Wasserstoff haben Gambling und Edels⁷³⁾ bei 1 A etwa 25 A/cm² und bei 0,1 A etwa 12 A/cm² gemessen. Einen abweichenden Verlauf zeigt die Stromdichte nach Untersuchungen von Grotrian⁷⁴⁾ beim Kohlendioxidbogen, wo 39 A/cm² bei 1 A und 210 A/cm² bei 0,1 A festgestellt wurden. Nach alledem liegt die gemessene Hochfrequenzstromdichte von 9,2 A/cm² durchaus im Rahmen der Gleichstromdichten für den gleichen Entladungsstrom 0,1 A. Bei dieser Sachlage ist die Vermutung nicht von der Hand zu weisen, daß auch bei den stromschwachen Entladungen von Grotrian, Gambling und Edels, v. Engel, Seeliger und Steenbeck sowie Thoma und Heer erhebliche Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht vorhanden waren. Nach den Tafeln von Loeb sollte das der Fall sein. Der erste Hinweis darauf findet sich bei Gambling und Edels⁷³⁾, die aus spektroskopischen Messungen schlossen, daß thermisches Gleichgewicht erst bei höheren Strömen nach der Ausbildung der Lichtbogensäule auftritt.

Weiter liegt die Vermutung nahe, daß die bei elektrodenlosen Ringentladungen beobachteten sehr hohen Elektronentemperaturen ebenso zu erklären sind wie die Elektronentemperatur der Fackel. Davis⁸²⁾ und später Mierdel⁸³⁾ haben für verschiedene Gase die Spannung längs des ringförmigen Entladungskanals im Moment der Zündung bestimmt. Für Luft wurde ein Minimum der Zündspannung von 840 V bei einem Produkt aus Kanallänge und Gasdruck p von 3,2 cm Torr gefunden. Es war also im Leerlauf
$$\frac{E}{p} = 262 \frac{\text{V}}{\text{cm Torr}}.$$
 Die Stabilisierung der Entladung könnte etwa bei $\frac{E}{p} \approx 100 \frac{\text{V}}{\text{cm Torr}}$ für den eigentlichen Entladungsvorgang, d. h. bei 38% der Leerlaufspannung erfolgen. In den strombegrenzenden Induktivitäten fällt dann 92,5% der Gesamtspannung ab und der Strom ist recht nahe der Kurzschlußstrom der Anlage. Die Tafel von Loeb⁵⁸⁾ reicht nicht bis zu $\frac{E}{p} =$

⁷⁹⁾ A. v. Engel, R. Seeliger u. M. Steenbeck, Z. Physik **85**, 144 (1933).

⁸⁰⁾ H. Thoma u. L. Heer, Z. techn. Physik **13**, 464 (1932).

⁸¹⁾ A. v. Engel, Z. techn. Physik **10**, 505 (1929).

⁸²⁾ B. Davis, Physic. Rev. **20**, 129 (1905).

⁸³⁾ G. Mierdel, Ann. Physik **85**, 612 (1928).

$100 \frac{\text{V}}{\text{cm Torr}}$; die Messungen von Townsend und Tizard⁶⁰⁾, die allerdings in diesem Gebiet mit besonderer Vorsicht betrachtet werden müssen, ergeben hierzu etwa folgende Werte der Elektronentemperatur T_e und der Driftgeschwindigkeit u_e :

$$\frac{T_e}{288^\circ} \approx 160 \quad u_e \approx 2,7 \cdot 10^7 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Es folgt eine Elektronentemperatur von etwa 46000°K . Die Stromdichte i ergibt sich für einen angenommenen Bereich der Elektronendichte von $10^{10} - 10^{12} \frac{1}{\text{cm}^3}$ zu

$$i = 0,043 - 4,3 \frac{\text{A}}{\text{cm}^2},$$

und die Leistung in einem Ring von 1 cm^2 Querschnitt wird

$$N = 13,8 - 1380 \text{ W}.$$

Die Größenordnungen sind nicht unwahrscheinlich. Was an neueren Meßergebnissen vorliegt, ist nicht einheitlich. Cabannes⁶⁴⁾ hat an den Edelgasen Neon, Argon, Krypton, Xenon Messungen im Druckbereich $0,05 - 50 \text{ Torr}$ bei der recht niedrigen Betriebsfrequenz 1 MHz durchgeführt und an dem besonders eingehend untersuchten Neon bei 1 Torr eine Feldstärke von $1,5 \text{ V/cm}$, eine Stromdichte von 20 A/cm^2 , einen Gesamtstrom von 320 A und eine Leistung von 700 W gefunden. Die Trägerdichte war etwa $2 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$, und die Leitfähigkeit $40 \frac{1}{\Omega \text{ cm}}$. Die Elektronentemperatur hat Cabannes bei Krypton unter ähnlichen Bedingungen mit der Doppelsonde zu rund 19000°K bestimmt; etwa diese Temperatur leitet er auch aus der Diffusionstheorie der Säule sowohl für Krypton als auch für die anderen Gase ab. V. Bezold⁶⁵⁾ hat aus spektroskopischen Untersuchungen an Helium und an Wasserdampf von $0,3$ und 1 Torr bei 35 MHz Betriebsfrequenz auf Elektronentemperaturen von mindestens 270000° für Helium und noch höhere für Wasserdampf geschlossen. Nach seinen Angaben über die Betriebsbedingungen ist gleichzeitig mit wesentlich höheren Feldstärken in der Entladung als bei Cabannes zu rechnen. Der Unterschied dürfte nicht so sehr darin begründet sein, daß v. Bezold im Impulsbetrieb arbeitet, denn die Impulslänge von $1 - 2 \text{ ms}$ war groß genug, um annähernd stationäre Endzustände zu erreichen. Wichtiger ist wohl neben dem wahrscheinlich höheren Innenwiderstand des Generators bei v. Bezold vor allem die höhere Betriebsfrequenz, die für die in dieser Arbeit benutzten ausgesprochenen Hochfrequenzbetrachtungen Vorbedingung ist. Es scheint, daß etwa die Grenze 10 MHz überschritten werden muß, bei der auch die Ausbildung der Elektronenfackel beginnt. Welche besonderen Rekombinationsbedingungen usw. das Entstehen so hoher Elektronentemperaturen notwendig machen, bleibt einstweilen offen. Die allmähliche Aufheizung der Elektronen durch das elektrische Hochfrequenzfeld wird auch von v. Bezold angenommen.

⁶⁴⁾ F. Cabannes, Ann. Phys. Paris (12) **10**, 1026 (1955).

⁶⁵⁾ D. v. Bezold, Z. angew. Physik **8**, 269 (1956).

Prüft man zum Schluß, ob auch die hohen Elektronentemperaturen, die Cobine und Wilbur⁴¹⁾ mit Sonden an der Elektronenfackel erhalten haben, auf Grund der erreichten Feldstärken oder der Stoßverluste verständlich sind, so bleiben doch starke Bedenken bestehen. Elektronentemperaturen von 80000—130000° würden Feldstärken über 200 V/cm Torr oder 11000 V/cm bei Atmosphärendruck und 4000° Gastemperatur erfordern, die in der Flamme außerhalb des Brenners sicher nicht vorhanden sind.

Herrn Prof. Dr. O. Hachenberg danke ich herzlich für sein dauerndes, großes Interesse an dieser Arbeit. Ferner bin ich Herrn Dr. H. Rother für anregende Diskussionen und Herrn Ing. H. Beyer für die Durchführung des größten Teils der Messungen zu Dank verpflichtet.

Berlin-Adlershof, Heinrich-Hertz-Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Bei der Redaktion eingegangen am 14. Januar 1958.

Über die Auswertung von Leitfähigkeitsglowkurven

Von K. W. Böer, S. Oberländer und J. Voigt

Mit 10 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Es wird für ein einfaches reaktionskinetisches Modell mit einer Hafttermgruppe einheitlicher energetischer Lage der Verlauf der Lösungsfunktionen des ihm entsprechenden Gleichungssystems diskutiert, unter gewissen Näherungsannahmen eine Methode zur Bestimmung physikalisch interessierender Parameter aus Leitfähigkeitsglowkurven angegeben und eine Fehlerabschätzung für die nach dieser Methode bestimmten Parameter durchgeführt. Es ergibt sich überdies, daß die Näherungsformel von Randall und Wilkins auch für Leitfähigkeitsglowkurven und auch dann, wenn ein Wiederanhaften von Elektronen nicht vernachlässigt werden kann, recht gute Werte für den energetischen Abstand der Hafttermgruppe vom Leitungsband liefert.

1. Einleitung

Die Kenntnis des Störtermpektrums in der verbotenen Zone eines Photoleiters oder Luminophors ist von großem physikalischen Interesse. Über gewisse Teile dieses Spektrums geben verschiedene experimentelle Methoden Aufschluß.

Am bekanntesten sind Untersuchungen des optischen Absorptionsspektrums im Ausläufer, Messungen der Leitfähigkeit im Bereich der Fremdleitung als Funktion der Temperatur und Untersuchungen der sogenannten Glowkurven.

Durch die Messung von Glowkurven erhält man Auskunft über einen Teil des sogenannten Hafttermpektrums, d. h. von Termen, die im thermodynamischen Gleichgewicht bei nicht zu hohen Temperaturen praktisch frei von Elektronen sind, die jedoch durch eine entsprechende Belichtung des Kristalls mit Elektronen gefüllt werden können.

Wird die Belichtung des Kristalls abgeschaltet, so entleeren sich diese Terme wieder und zwar um so schneller, je höher die Temperatur ist, bzw. je dichter die Terme am Leitungsband liegen.

Aus der Geschwindigkeit der Entleerung bei gegebener Temperatur könnten Aussagen über die energetische Lage dieser Haftterme gewonnen werden.

Eine besonders elegante Methode, die Methode der Glowkurven, besteht nun darin, daß die Versuchstemperatur zeitlinear erhöht wird, wodurch die Entleerung der Haftterme in charakteristischer Weise beschleunigt wird. Diese Entleerung der Haftterme durch die thermische Anregung der Elektronen in das Leitungsband, sowie die anschließende Rekombination derselben mit

ionisierten Aktivatoren ist durch Messung der Leitfähigkeit bzw. der Lumineszenz nachweisbar. Wird die Leitfähigkeit bzw. die Lumineszenz als Funktion der zeitlinear erhöhten Temperatur aufgetragen (Leitfähigkeits- bzw. Lumineszenzglowkurven), so ergeben sich Kurven, die — bei nicht zu kleinen Aufheizgeschwindigkeiten — gewisse Maxima aufweisen. Diese Maxima werden bei um so tieferen Temperaturen liegen, je kleiner der energetische Abstand der zu entleerenden Haftterme vom Leitungsband ist. Randall und Wilkins¹⁾ haben eine Beziehung zwischen der Temperatur eines Maximums von Lumineszenzglowkurven und dem energetischen Abstand der entsprechenden Hafttermgruppe vom Leitungsband unter Benutzung eines stark vereinfachten reaktionskinetischen Modells hergeleitet. Dieser Ausdruck wird zur Zeit zur Abschätzung der energetischen Lage von Hafttermen häufig verwandt.

In dieser Arbeit soll ein reaktionskinetisches Modell, das eine Hafttermgruppe einheitlichen energetischen Abstandes vom Leitungsband enthält, theoretisch genauer analysiert werden. Es soll dabei untersucht werden, inwieweit ein solches Modell zur Beschreibung des Verlaufes von Leitfähigkeitsglowkurven herangezogen werden kann, und welche Aussagen man über die Parameter dieses reaktionskinetischen Modells aus den experimentell erhaltenen Kurven machen kann. Dabei sollen Beziehungen zwischen meßbaren Größen und den physikalisch interessanten Parametern des Modells hergeleitet werden. Für eingeführte Näherungen werden Fehlerabschätzungen angegeben.

2. Das reaktionskinetische Modell

Das für die folgenden Überlegungen zugrunde gelegte reaktionskinetische Modell ist in Abb. 1 wiedergegeben. Eine optische Anregung von Elektronen erfolgt aus tiefliegenden Termen. Es werden α Elektronen pro sec und cm^3 in das Leitungsband befördert.

Von hier aus können sie an unbesetzten Hafttermen der Konzentration $(H-h)$ anhaften bzw. mit unbesetzten tiefliegenden Aktivatortermen der Konzentration $(n+h)$ rekombinieren. Aus den Hafttermen ist eine thermische Anregung möglich.

Durch den Vorgang der optischen Anregung werden die Haftterme zunächst mit Elektronen gefüllt. Dabei ist der maximal erreichbare Füllungsgrad unter anderem von der optischen Anregung und der Temperatur abhängig.

Wird die optische Anregung abgeschaltet, so fällt ein Teil der Nachlieferung von Elektronen in das Leitungsband durch das Verschwinden des Überganges α fort, die Konzentration von Leitungselektronen nimmt nun ab. Diesen Vorgang beschreibt das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \alpha h - \beta n (H - h) - \gamma n (n + h) \\ \frac{dh}{dt} &= -\alpha h + \beta n (H - h). \end{aligned} \quad (1)$$

¹⁾ R. Randall u. M. Wilkins, Proc. Roy. Soc. London A 184, 366, 390 (1945).

Hierbei ist

$$\alpha = \alpha^* e^{-\frac{AE}{kT}}, \quad (2)$$

also eine Konstante, solange die Temperatur nicht geändert wird. Dann ergeben sich aus Gl. (1) monotone Funktionen n und h in t (vgl. ²⁾).

Wird die Temperatur zeitlinear gemäß

$$T = T_0 + \mu t \quad (3)$$

erhöht, so kann die Lösungskurve $n(t)$ der Gl. (1) nach anfänglichem Absinken zunächst wieder ansteigen, soweit die Heizgeschwindigkeit μ nicht zu klein gewählt wurde.

Es interessiert zur Untersuchung von Leitfähigkeitsglowkurven der weitere zeitliche Verlauf nur solcher Lösungsfunktionen $n(t)$. Sie sollen von dem Anfangspunkt an betrachtet werden, der durch dieses Minimum von $n(t)$ bestimmt ist. Das t an dieser Stelle wird mit t_0 bezeichnet.

Diese Lösungsfunktionen sind aus mathematischen Gründen nicht einfach zu behandeln. Es soll daher zu genäherten Differentialgleichungssystemen übergegangen werden. Die Berechtigung zu einer solchen Vereinfachung wird im folgenden näher untersucht.

2.1 Quasistationäre Näherung

Wie durch Adirowitsch³⁾ gezeigt wurde, läßt sich in vielen Fällen die zeitliche Änderung der Leitungselektronenkonzentration gegen die zeitliche Änderung der Konzentration von Haftelektronen vernachlässigen.

Das führt zu dem neuen System

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha h^* - \beta n^* (H - h^*) - \gamma n^* (n^* + h^*) \\ \frac{dh^*}{dt} &= -\alpha h^* + \beta n^* (H - h^*). \end{aligned} \quad (4)$$

2.2 Näherung für die folgenden Untersuchungen von Glowkurven

Für die weiteren Rechnungen wurde das Gleichungssystem (4) durch die zusätzliche Annahme $n \ll h$ weiter vereinfacht. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \bar{h} - \beta \bar{n} (H - \bar{h}) - \gamma \bar{n} \bar{h} \\ \frac{d\bar{h}}{dt} &= -\alpha \bar{h} + \beta \bar{n} (H - \bar{h}). \end{aligned} \quad (5)$$

Für nicht zu hohe Temperaturen bzw. zu kleinen energetischen Abstand der Haftterme vom Leitungsband ist diese Annahme sehr gut erfüllt. Das Gleichungssystem (5) wird den folgenden Untersuchungen zugrunde gelegt.

3. Vergleich der Lösungskurven der Näherungssysteme mit denen des exakten Differentialgleichungssystems

Für ein beliebig vorgegebenes festgehaltenes Wertepaar

$$t_0, \quad \frac{h(t_0)}{H} = \frac{h^*(t_0)}{H} = \frac{\bar{h}(t_0)}{H}$$

²⁾ K. W. Böer u. H. Vogel, Z. physik. Chem. 206, 1 (1956).

³⁾ E. I. Adirowitsch, „Einige Fragen der Lumineszenz der Kristalle“, Akademie-Verlag, Berlin, 1953. (Übers. a. d. Russ.)

läßt sich zeigen, daß die Lösungsfunktionen von Gl. (5) und Gl. (4) bei dem Grenzübergang $H \rightarrow \infty$ exakt in die Lösungsfunktionen von Gl. (1) übergehen.

Außerdem ergeben sich für beliebiges H für die Lösungsfunktionen $n(t)$, $n^*(t)$ und $\bar{n}(t)$ die folgenden Ungleichungen:

$$n^*(t) < \bar{n}(t) \quad (6)$$

für alle $t > t_0$ ($\bar{n}(t)$ ist eine echte Majorante von $n^*(t)$) und

$$n(t) < n^*(t) \quad (7)$$

für $t_0 < t < t_{\max}^*$, wobei t_{\max}^* die Zeit ist, zu der die Funktion $n^*(t)$ ihren Maximalwert annimmt.

In ähnlicher Weise gelten auch

$$h^*(t) < \bar{h}(t) \quad (8)$$

für alle $t > t_0$ sowie

$$h(t) < h^*(t) \quad (9)$$

für $t_0 < t < t_{\max}^*$. Die Bedingung, daß t aus dem angegebenen Intervall stammt, ist für die Ungleichungen (7) und (9) hinreichend.

Für ein Parametermultipel, wie es auch experimentell gefunden wird, wurde ein quantitativer Vergleich der Lösungsfunktionen $n(t)$ und $\bar{n}(t)$ sowie $h(t)$ und $\bar{h}(t)$ innerhalb eines bestimmten Temperaturintervalls durch numerische Integration der Gl. (1) und (5) durchgeführt.

Als Parameterwerte wurden verwandt: Als Anfangswerte wurden gewählt:

$$\begin{aligned} \mu &= 1^\circ/\text{s} & T(t_0) &= 150^\circ \text{K} \\ \beta/\gamma &= 10 & h(t_0) &= H \\ \alpha^* &= 10^{12} \text{ s}^{-1} \\ \Delta E &= 0,5 \text{ eV} \\ \gamma H &= 100 \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

Aus den später zu behandelnden Messungen ergibt sich $\gamma \approx 10^{-11} [\text{cm}^3 \text{ s}^{-1}]$. Es wurde durch die Wahl des angegebenen γH ein bewußt kleiner Wert von $H \approx 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ angenommen, da mit einer Abnahme des Fehlers mit wachsendem H zu rechnen ist (s. o.).

Für die Abweichungen der Lösungsfunktion $\bar{n}(t)$ von $n(t)$ ergeben sich die in der folgenden Tabelle angegebenen relativen Fehler in Abhängigkeit von der Temperatur. Da der zur numerischen Integration erforderliche Aufwand mit wachsender Temperatur beträchtlich zunimmt, konnte nur bis zu der angegebenen Temperatur gerechnet werden.

T in $^\circ\text{K}$	$\bar{n} - n$ in % von n	$\bar{h} - h$ in % von h
150	0,000%	0,000%
155	0,212%	0,000%
160	0,198%	0,000%
165	0,182%	0,000%
170	0,160%	0,000%
175	0,129%	0,001%
180	0,094%	0,002%
185	0,076%	0,003%
190	0,066%	0,008%
195	0,066%	0,013%

Im Rahmen des zur Zeit Möglichen rechtfertigen diese Ergebnisse die Benutzung der Gl. (5) an Stelle des exakten Systems (1) für die Untersuchung von Leitfähigkeitsglowkurven. Zumindest sind die aus obiger Tabelle ersichtlichen Fehler klein gegen die im folgenden noch anzugebenden Fehler bei der Auswertung der experimentellen Untersuchungen mit Hilfe der zu entwickelnden Methode.

Auf Grund der Ungleichungen (6) bis (9) ergibt sich, daß die Lösungskurven der quasistationären Näherung noch weniger von den Lösungskurven des exakten Gleichungssystems (1) abweichen.

4. Mathematische Behandlung des genäherten Gleichungssystems

Die Lösungsfunktionen $\bar{n}(t)$ und $\bar{h}(t)$ des Gleichungssystems (5) sind nicht explizit mit Hilfe von elementaren Funktionen angebar. Es lassen sich jedoch über den Verlauf der Lösungsfunktionen gewisse Aussagen machen.

So läßt sich zeigen, daß das Vorzeichen der Steigung und Krümmung der Funktion $\bar{n}(t)$ durch elementare Funktionen bestimmt ist:

$$\text{sign}\left(\frac{d\bar{n}}{dt}\right) = \text{sign}\left(\mu - \frac{\beta \gamma H k T^2}{\alpha \Delta E} \cdot \frac{\bar{n}^2}{\bar{h}}\right) \quad (10)$$

und

$$\text{sign}\left(\frac{d^2\bar{n}}{dt^2}\right) = \text{sign}\left(\frac{\Delta E}{k T} \cdot \frac{\bar{h}}{H} \cdot \frac{\beta - \gamma}{\beta} - 2\right). \quad (11)$$

Aus Gl. (10) folgt, daß $\bar{n}(t)$ tatsächlich zunächst mit der Zeit wächst, wenn die Heizgeschwindigkeit größer ist als eine gewisse kritische Heizgeschwindigkeit:

$$\mu_{\text{krit}} = \frac{\beta \gamma H k T^2(t_0) \bar{n}^2(t_0)}{\alpha \Delta E \bar{h}(t_0)}. \quad (12)$$

Ferner ergibt sich, daß dann die Lösungsfunktion $\bar{n}(t)$ für $t > t_0$ genau ein Extremum besitzt und zwar ein Maximum, das Glowmaximum.

Die Lösungsfunktion $\bar{h}(t)$ fällt für alle $t > t_0$ monoton mit der Zeit. Beide Lösungsfunktionen gehen mit $t \rightarrow \infty$ gegen Null.

4.1 Anwendung der Methode der charakteristischen Punkte

Unter der Voraussetzung, daß die Heizgeschwindigkeit größer als die kritische Heizgeschwindigkeit μ_{krit} gewählt wird, ist das Auftreten genau eines Maximums der Lösungsfunktionen $\bar{n}(t)$ gesichert. An dieser Stelle (charakteristischer Punkt) verschwindet die Ableitung dieser Lösungsfunktion, es ergeben sich besonders einfache Beziehungen. Diese sollen im folgenden zusammengestellt und zur experimentellen Bestimmung physikalisch interessierender Parameter verwandt werden (Methode der charakteristischen Punkte (vgl. auch ²⁾)).

Die Zeit, zu der die Lösungsfunktion $\bar{n}(t)$ ihr Maximum annimmt sei t_{max} . Mit den Bezeichnungen

$$\bar{n}(t_{\text{max}}) = \nu \quad (13a)$$

$$\frac{\bar{h}(t_{\text{max}})}{H} = \varepsilon \quad (13b)$$

und

$$T(t_{\text{max}}) = \tau \quad (13c)$$

gilt dann nach Gl. (10)

$$\mu = \frac{\beta \gamma k \tau^2 v^2}{\alpha(\tau) \Delta E \cdot \varepsilon} \quad (14)$$

Aus den Gln. (5) und (14) ergeben sich Bestimmungsgleichungen für τ , v und ε . Wird τ und v gemessen, so besteht damit die Möglichkeit, andere unbekannte Parameter des Systems zu bestimmen.

4.2 Bestimmung von γ und ΔE

Unter Einführung der Hilfsfunktionen

$$u = \frac{\mu}{v \tau^2} \quad (15a)$$

und

$$v = v e^{\Delta E / k \tau} \quad (15b)$$

ergeben sich aus den Bestimmungsgleichungen für v , τ und ε folgende Beziehungen:

$$u = \frac{\gamma k}{\Delta E} \left(1 + \frac{\beta - \gamma}{\alpha^*} v \right) \quad (16)$$

und

$$u = \frac{\gamma k}{\Delta E} \frac{\beta}{\alpha^*} \frac{v}{\varepsilon} \quad (17)$$

Wird ein charakteristischer Punkt experimentell bestimmt (durch Messung von v und τ bei vorgegebenem μ), so ist der Wert u bekannt und es gelingt dann aus Gl. (16) näherungsweise $\gamma k / \Delta E$ zu bestimmen:

$$u \approx \frac{\gamma k}{\Delta E} \quad (18)$$

falls gezeigt werden kann, daß $\frac{\beta - \gamma}{\alpha^*} v$ hinreichend klein gegen eins ist.

Das ist im allgemeinen weitgehend erfüllt, wie die in Ziffer 5 angegebene Fehlerrechnung zeigt.

Will man nicht sehr grobe Näherungen einführen, so lassen sich weitere Aussagen nur gewinnen, wenn man eine Veränderung der Lage des charakteristischen Punktes als Funktion einer Änderung gewisser Parameter des Systems (15) und (17) näher betrachtet. In diesem Zusammenhang bietet sich eine Variation der Heizgeschwindigkeit μ an (dann können alle Untersuchungen an demselben Kristall ausgeführt werden). Es läßt sich theoretisch und experimentell zeigen, daß mit Änderung der Heizgeschwindigkeit (unter Beibehaltung aller übrigen Parameter) v und τ variieren.

Aus den Gln. (16) und (17) ergibt sich unter der — später noch zu rechtfertigenden — Annahme, daß sich ε nur sehr geringfügig mit der Heizgeschwindigkeit ändert,

$$v \approx \text{const.} \quad (19)$$

Da andererseits Gl. (15b) auch in der Form

$$\frac{1}{\tau} = - \frac{k}{\Delta E} \ln \frac{v}{v_0} = - \frac{k}{\Delta E} \ln \frac{v}{v_0} - \frac{k}{\Delta E} \ln \frac{v_0}{v} \quad (20)$$

geschrieben werden kann, worin v_0 ein Dimensionsfaktor vom Betrage 1 und gleicher Dimension wie v darstellt, bedeutet (19), daß die Elektronenkonzen-

tration am Glowmaximum von der Temperatur τ des Maximum gemäß

$$\frac{1}{\tau} \approx -\frac{k}{\Delta E} \ln \frac{\nu}{\nu_0} + \text{const} \quad (21)$$

abhängt⁴⁾. Aus der Gl. (21) kann in einfacher Weise (τ und ν sind meßbare Größen) ΔE bestimmt werden. Für die auf diese Weise ermittelten Werte von ΔE wird im folgenden eine Fehlerabschätzung durchgeführt (vgl. Ziff. 5).

Mit Hilfe der Gl. (18) ist es dann möglich, unter Verwendung des Wertes von ΔE nunmehr auch γ zu bestimmen.

5. Fehlerabschätzung

Führt man mit Hilfe von $\gamma \frac{k}{\Delta E} = u \cdot \delta$, was an Stelle von Gl. (18) jetzt exakt gelten soll, die Korrekturfunktion δ ein, so läßt sich unter der Annahme $\beta > \gamma$ aus den Gln. (5) und (16) die Abschätzung

$$1 > \delta > 1 - \varepsilon \quad (22)$$

angeben, aus der bei Kenntnis von ε Schranken für den relativen Fehler von $\frac{\gamma}{\Delta E}$ entnommen werden können.

Über den Füllungsgrad ε am Glowmaximum kann man unter anderem aus Gl. (11) eine Abschätzung erhalten:

$$\varepsilon \leq 2 \frac{k \tau}{\Delta E} \frac{\beta}{\beta - \gamma}. \quad (23)$$

Für den Fall, daß Gl. (23) keine befriedigende Abschätzung liefert, kann experimentell durch Wahl eines genügend kleinen Anfangswertes $\bar{h} (t_0)/H$ stets dafür gesorgt werden, daß der Fehler bei der Bestimmung von $\gamma/\Delta E$ hinreichend klein gemacht werden kann.

Zur Fehlerberechnung für die ΔE -Bestimmung wird an Stelle von Gl. (21) die exakt geltende Gleichung

$$\frac{1}{\tau} = -\frac{e k}{\Delta E} \ln \frac{\nu}{\nu_0} + c \quad (24)$$

eingeführt. Hierbei ist e eine von den Parametern des Ausgangssystems (5) und (14) abhängige Korrekturfunktion. Es läßt sich aus den Gln. (16) und (24) exakt zeigen, daß gilt

$$n = \frac{\gamma k}{\Delta E} (1 + c_1 \nu^{(1-e)}), \quad (25)$$

wobei

$$c_1 = \frac{\beta - \gamma}{\alpha^*} e^{\frac{\Delta E}{k} c}$$

ist. Daraus läßt sich e und damit der Fehler von ΔE bestimmen.

6. Experimentelle Untersuchungen

Es wurden CdS-Einkristalle in Kondensatorzellenanordnung mit aufgedampften Goldelektroden nach vorangegangener Beglimmung zur Erzeugung

⁴⁾ Dies entspricht der von Bube angegebenen Beziehung (Physic. Rev. 106, 708 (1957)).

Ohmscher Kontakte versehen. Diese Kristalle wurden in einem aus Abb. 2 ersichtlichen Rezipienten so angebracht, daß sie im Vakuum ($p < 10^{-5}$ Torr) auf 120°K abgekühlt und dann näherungsweise zeitlinear bis auf 310°K aufgeheizt werden konnten.

Eine Belichtung der Kristalle konnte mit Hilfe eines Doppelmonochromators vorgenommen werden und erfolgte im Ausläufer bei $546\text{ m}\mu$.

An die Kristalle wurde eine Saugspannung von 6 Volt angelegt. Die automatische Registrierung des Stromes erfolgte unter Verwendung eines Galvanometers auf einem gleichmäßig bewegten Photopapier.

6.1 Bestimmung der Aufheizgeschwindigkeit

Bei den behandelten Untersuchungen kommt es auf eine möglichst genaue Bestimmung der Kristalltemperatur sowie der Aufheizgeschwindigkeit an. Zu diesem Zweck wurde die Temperatur sowohl auf der Kristallunterlage (Au) durch ein in einer kleinen Bohrung direkt neben dem Kristall eingelötetes Thermoelement Th_1 als auch auf dem Kristall selbst durch ein sehr dünnes aufgedrucktes zweites Thermoelement Th_2 gemessen.

Die erhaltenen Temperaturen wurden bei verschiedenen Heizgeschwindigkeiten miteinander verglichen. Es ergab sich, daß sie für Aufheizgeschwindigkeiten, die kleiner als $1,5^\circ/\text{sec}$ sind, in einem Temperaturbereich von 170°K bis 270°K um weniger als 1% voneinander abweichen.

Die Temperaturen wurden unter Verwendung von Lichtmarken jeweils zusammen mit dem Strom registriert. In dem Bereich von 170°K bis 270°K ergaben sich Abweichungen von der Konstanz der Heizgeschwindigkeit, die im Mittel 3% betragen.

6.2 Wahl der Versuchsobjekte und Bestimmung der kristalleigenen Konstanten

Für die Untersuchung von Leitfähigkeitsglowkurven nach dem angegebenen einfachen Modell wurden nur solche Kristalle ausgewählt, die ein besonders scharfes Glowmaximum zeigten, das auf die Existenz nur einer deutlich ausgeprägten Hafttermgruppe möglichst einheitlicher energetischer Lage im untersuchten Energiebereich schließen ließ.

Aus meßtechnischen Gründen wurden dann nur die Kristalle untersucht, deren Glowmaxima innerhalb des Temperaturbereichs, in dem eine zuverlässige Messung möglich war, lagen (170°K bis 270°K).

Die Reproduzierbarkeit der Meßkurven wurde geprüft. Für die im folgenden angegebenen Meßresultate beträgt die Reproduzierbarkeit der Temperatur des Glowmaximums etwa 0,3%, des Stromes am Glowmaximum etwa 5%.

Es wurde festgestellt, daß insbesondere mit Kobalt aktivierte Kristalle ein sehr scharfes Glowmaximum bei etwa 180°K zeigen. Diese Kristalle

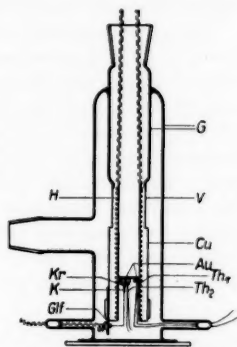


Abb. 2. Rezipient; G = Hartglasapparatur; V = Vacon; Cu = Kupfer; Au = Goldunterlagen; Th_1, Th_2 = Thermolemente; H = Heizung; Kr = CdS-Kristall; K = Stromkontakt; Glf = Glimmerfeder

wurden genauer untersucht. Außerdem wurden verschiedene mit Kupfer- bzw. Silber aktivierte Kristalle, die nach einer vorangegangenen Temperung im Vakuum bei 430°K und anschließender rascher Abkühlung ebenfalls gelegentlich⁵⁾ ein ausgeprägtes Maximum zeigen, untersucht.

Durch mikroskopische Ausmessung wurde die Dicke der Kristallplättchen sowie der für den Stromfluß maßgebliche Kristallquerschnitt bestimmt. Als solcher wurde die Fläche der aufgedampften Elektroden angenommen; sie beträgt etwa 20 % der Gesamtfläche des Kristalls. Für die Bestimmung der Elektronenkonzentration geht die Beweglichkeit ein. Da sie an den untersuchten Kristallen nicht getrennt gemessen wurde, ist bei der Bestimmung von γ ein Wert von $100\text{ cm}^2/\text{Vs}$ angenommen worden, wie er sich auch bei Hall-Effekts-Messungen an Kristallen der gleichen Herstellung ergab. Durch starke Streuung der Beweglichkeit von Kristall zu Kristall ist dieser Wert jedoch um den Faktor 2 unsicher. Bei der Bestimmung von ΔE geht die Beweglichkeit nicht ein.

6.3 Meßergebnisse

Es wurde eine Schar von Glowkurven aufgenommen. Scharparameter ist die Heizgeschwindigkeit. Die Heizgeschwindigkeit wurde zwischen $0,1$ und $1,5^\circ/\text{sec}$ variiert. Abb. 3 gibt eine solche Schar für den mit Kupfer aktivierte Kristall Nr. 4 an. Abb. 4 zeigt für $\mu = 0,48^\circ/\text{sec}$ den zeitlichen Verlauf der Temperatur.

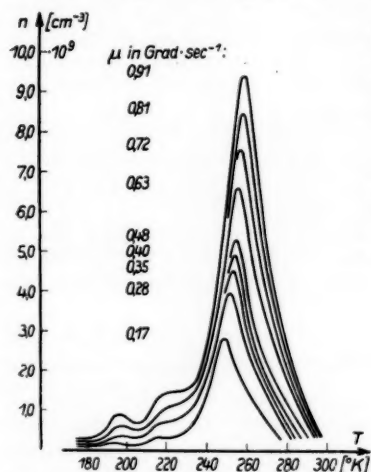


Abb. 3. Gemessene Glowkurvenschar eines mit Cu dotierten CdS-Einkristalls (Scharparameter ist die Heizgeschwindigkeit μ)

Abb. 3 gibt eine solche Schar für den mit Kupfer aktivierte Kristall Nr. 4 an. Abb. 4 zeigt für $\mu = 0,48^\circ/\text{sec}$ den zeitlichen Verlauf der Temperatur.

In Abb. 5 ist der Logarithmus der am Maximum erhaltenen Leitungselektronenkonzentration über der reziproken Temperatur des Glowmaximums aufgetragen. Es läßt sich in guter Näherung eine Gerade durch die Meßpunkte legen.

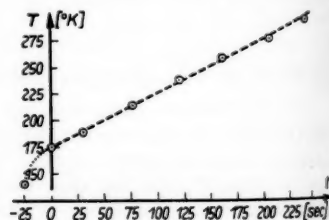


Abb. 4. Zeitlicher Verlauf der Temperatur bei der Aufnahme der Glowkurven

Die mittlere horizontale Abweichung der Meßpunkte von der Ausgleichsgeraden beträgt $0,6\%$ (bezogen auf das kleinste gemessene $1/\tau$).

⁵⁾ Bei den meisten Kristallen, die mit Kupfer oder Silber aktiviert waren, ergaben sich jedoch zwei dicht beieinander liegende Maxima. Diese Kristalle wurden hier nicht näher untersucht.

In Abb. 6 ist der Logarithmus der Heizgeschwindigkeit über der reziproken Temperatur des Glowmaximums aufgetragen. Auch hier läßt sich in guter Näherung eine Gerade durch die Meßpunkte legen. Die mittlere horizontale Abweichung der Meßpunkte von der Ausgleichsgeraden beträgt nur 0,3 %.

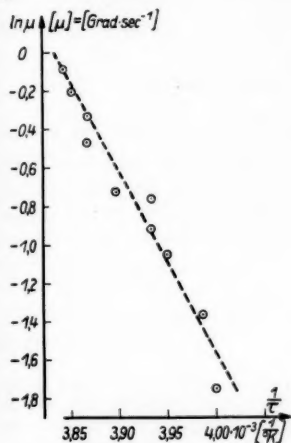


Abb. 5. Abhängigkeit der Leitungselektronenkonzentration am Glowmaximum von der Temperatur des Glowmaximums bei verschiedenen Aufheizgeschwindigkeiten

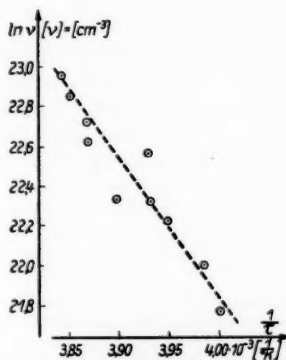


Abb. 6. Abhängigkeit der Temperatur des Glowmaximums von der Aufheizgeschwindigkeit

In ähnlicher Weise wurden für fünf weitere Kristalle Glowkurvenscharen gemessen. Dabei ergaben sich stets gute Geraden für die halblogarithmische Auftragung von Elektronenkonzentration im Maximum bzw. Heizgeschwindigkeit über der reziproken Temperatur des Glowmaximums. Die mittleren relativen Fehler einer solchen Darstellung sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Kristall	CdS (Cu) 1	CdS (Co) 2	CdS (Ag) 3	CdS (Cu) 4	CdS (Co) 5	CdS (Co) 6
$\ln \nu \cdot 1/\tau$	1,2%	0,8%	1,1%	0,6%	0,4%	1,7%
$\ln \mu \cdot 1/\tau$	0,5%	0,5%	0,6%	0,3%	0,5%	1,4%

Aus der in Abb. 4 angegebenen Darstellung bzw. entsprechender Darstellungen für die anderen untersuchten Kristalle, läßt sich aus dem Anstieg der Geraden der energetische Abstand ΔE der Hafttermgruppe vom Leitungsband berechnen. Die Streuung der Meßpunkte ist bei den Meßkurven für die Kristalle Nr. 4 und 5 besonders gering. Demnach ist auch der Fehler für die Bestimmung des Anstieges hier entsprechend kleiner. Er beträgt jedoch für die Meßserie beim Kristall Nr. 4 bereits 10 % und für die Meßserie beim Kristall Nr. 5 noch 6 %.

In Abb. 7 ist der Logarithmus der am Glowmaximum erhaltenen Elektronenkonzentration über der reziproken Temperatur des Glowmaximums für den Kristall Nr. 5 aufgetragen. (Die entsprechende Darstellung für den Logarithmus der Heizgeschwindigkeit gibt Abb. 8.)

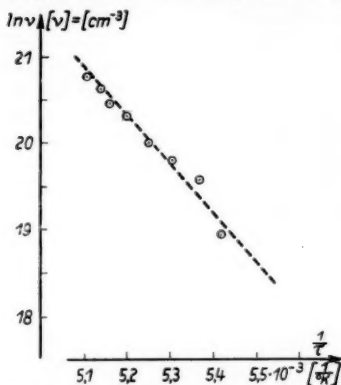


Abb. 7. Abhängigkeit der Leitungselektronenkonzentration am Glowmaximum von der Temperatur des Glowmaximums bei verschiedenen Aufheizgeschwindigkeiten eines mit Co dotierten CdS-Einkristalls

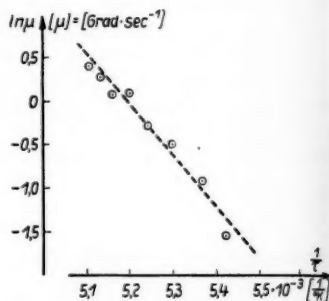


Abb. 8. Abhängigkeit der Temperatur des Glowmaximums von der Aufheizgeschwindigkeit eines mit Co dotierten Kristalls

Aus der Steigung der Ausgleichsgeraden in Abb. 5 und 7 wurde nach Gl. (21) der energetische Abstand der entsprechenden Hafttermgruppe vom Leitungsband bestimmt.

Es ergab sich für

$$\text{CdS (Cu) 4: } \Delta E = 0,59 \text{ eV;}$$

$$\text{CdS (Co) 5: } \Delta E = 0,46 \text{ eV.}$$

Aus Gl. (18) gewinnt man

$$\frac{\gamma}{b} \approx \frac{\mu e \Delta E}{k \tau^2 \sigma (t_{\max})}. \quad (27)$$

Durch Einsetzen der erhaltenen Werte für ΔE sowie der gemessenen Werte für τ , μ und $\sigma(t_{\max})$ ergaben sich für

$$\text{CdS (Cu) 4: } \gamma/b = 8,9 \cdot 10^{-14} \text{ V cm;}$$

$$\text{CdS (Co) 5: } \gamma/b = 2,1 \cdot 10^{-12} \text{ V cm.}$$

Unter der Annahme $b = 100 \text{ cm}^2/\text{V sec}$ erhält man für

$$\text{CdS (Cu) 4: } \gamma = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1};$$

$$\text{CdS (Co) 5: } \gamma = 2,1 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}.$$

6.4 Fehlerangabe für die Meßergebnisse

Nach Gl. (25) wurde aus den Meßergebnissen der Wert der hier konstanten Korrekturfunktion ϱ abgeschätzt. Es ergab sich für CdS (Cu) 4 und CdS (Co) 5:

$$1 > \varrho > 0,95.$$

Der durch Messung der experimentell bestimmbaren Größen μ , τ und $\sigma(t_{\max})$ für den Wert von ΔE sich ergebende mittlere Fehler beträgt bei CdS (Cu) 4 etwa $\pm 15\%$, bei CdS (Co) 5 etwa $\pm 10\%$.

Aus den Ungleichungen (22) und (23) lassen sich unter Benutzung der Meßergebnisse Schranken für den relativen Fehler von $\frac{\gamma}{\Delta E \cdot b}$ abschätzen. Daraus ergibt sich für CdS (Cu) 4 und CdS (Co) 5:

$$1 > \delta > 0,9.$$

Der aus der Messung für den Wert $\frac{\gamma}{\Delta E \cdot b}$ sich ergebende Fehler beträgt bei CdS (Cu) 4 etwa $\pm 10\%$, bei CdS (Co) 5 etwa $\pm 8\%$.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß zu den Meßfehlern, die durch eine Verbesserung der Meßapparatur sicherlich bedeutend vermindert werden können, noch systematische Fehler durch die Methode der Auswertung der Meßergebnisse hinzukommen, die durch die oben angegebenen Schranken von ρ und δ abgeschätzt sind. Diese systematischen Fehler bewirken, daß die Werte für ΔE um weniger als 5% und für γ/b um weniger als 15% zu groß erhalten werden.

7. Numerische Berechnung der Lösungskurven des Systems (5) für die experimentell bestimmten Parameter

Unter Verwendung der im vorangegangenen Paragraphen aus dem Experiment für CdS (Cu) 4 erhaltenen Parameter

$$\Delta E = 0,59 \text{ eV}$$

$$\gamma = 10^{-11} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1},$$

sowie der den Messungen zugrunde liegenden Heizgeschwindigkeiten und der Anfangswerte

$$T(t_0) = 175^\circ \text{ K},$$

$$\bar{h}(t_0)/H = 1$$

wurden für verschiedene Werte β und α^* Lösungskurven des Systems (5) numerisch berechnet.

Diejenige Lösungskurvenschar, die in Lage und Höhe der Maxima von $\bar{n}(t)$ den experimentell für CdS (Cu) 4 erhaltenen Glowmaxima am besten entspricht⁶⁾, ist in Abb. 9 wiedergegeben. Es zeigt sich, daß Lage und Höhe des Glowmaximums in Abhängigkeit von der Aufheizgeschwindigkeit übereinstimmend gut mit den Meßgrößen γ und τ übereinstimmen.

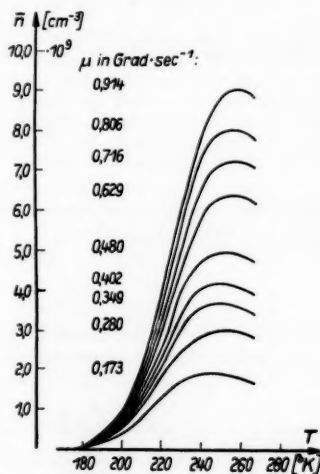


Abb. 9. Numerisch berechnete Glowkurvenschar

⁶⁾ Sie ergab sich bei $\beta = 10^{-10} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-1}$ und $\alpha^* = 10^{13} \text{ sec}^{-1}$, jedoch soll darin keine Bestimmungsmöglichkeit für β und α^* gesehen werden.

Die Gesetzmäßigkeit

$$\frac{1}{\tau} = a \ln \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right) + b$$

ist für $\psi = \nu$ bzw. für $\psi = \mu$ ausgezeichnet erfüllt (ψ_0 ist ein Dimensionsfaktor vom Betrage 1). Eine Abweichung von diesem Gesetz konnte bei der verwandten Rechengenauigkeit, die eine Bestimmung von ν auf drei geltende Ziffernstellen und von τ auf fünf geltende Ziffernstellen zuläßt, numerisch nicht mehr festgestellt werden.

Für den aus dem Ansatz $\psi = \nu$ folgenden Wert von ΔE ergab sich eine hier konstante — Korrekturfunktion

$$q = 0,956.$$

Für die Korrekturfunktion δ ergab sich durch direkten Vergleich des verwandten $\frac{\gamma}{\Delta E}$ mit den erhaltenen Werten

$$\delta = 0,977.$$

Abb. 10 zeigt den Verlauf des Besetzungsgrades der Haftterme mit der zeitlinear wachsenden Temperatur bei den verschiedenen Heizgeschwindigkeiten. Als besonders bemerkenswertes Ergebnis erhält man, daß der Füllungsgrad bei der Temperatur des Glowmaximums bereits einen äußerst kleinen Wert angenommen hat:

$$\varepsilon \approx 0,025.$$

Außerdem ist ersichtlich, daß in recht guter Näherung $\varepsilon \approx \text{const}$ ist (die Werte

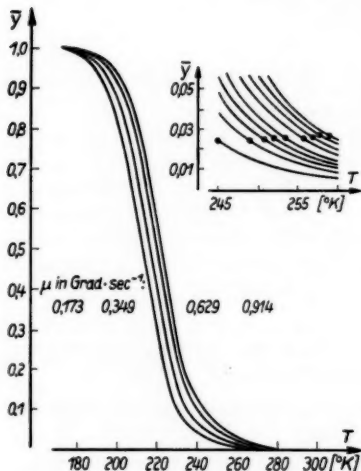


Abb. 10. Numerisch berechneter Besetzungsgrad der Haftterme bei Glowkurven ($y = h/H$). Die Punkte in dem vergrößert herausgezeichneten Teil der Kurvenschar geben die Temperatur der Glowmaxima wieder. Scharparameter ist die Heizgeschwindigkeit

des Besetzungsgrades bei der Temperatur des Glowmaximums sind in Abb. 10 durch Punkte markiert).

Unter Benutzung der Abschätzung (22) ergibt sich für δ

$$1 > \delta > 0,975.$$

Die gute Übereinstimmung dieses Wertes mit dem zuvor angegebenen direkt erhaltenen Wert von δ gibt einen Hinweis für die Schärfe der Abschätzung (22).

8. Vergleich mit den Ergebnissen von Randall und Wilkins

Randall und Wilkins haben unter der Voraussetzung $\beta = 0$ eine einfache Formel für die Berechnung des energetischen Abstandes ΔE der Hafttermgruppe vom Leitungsband aus der gemessenen Temperatur des Glowmaximums für Lumineszenz glowkurven angegeben. Sie erhielten die Gleichung

$$\Delta E = \ln a^* k \tau, \quad (28)$$

die für den Wert $\alpha^* = 10^{13} \text{ sec}^{-1}$, der auch der angegebenen numerisch berechneten Kurvenschar zugrunde liegt, in

$$\Delta E = 30 k \tau \quad (29)$$

übergeht (vgl. 7)).

Randall und Wilkins geben

$$\Delta E = 25 k \tau \quad (30)$$

an.

Die Auswertung der in Abb. 9 bezeichneten Lösungskurven ergibt für $\mu = 0,5^\circ/\text{s}$

$$\Delta E = 27 k \tau,$$

also eine beachtlich gute Übereinstimmung mit der von Randall und Wilkins angegebenen Formel (30).

Dies darf wohl als Hinweis dafür gewertet werden, daß der Ausdruck (30) für eine überschlägliche Bestimmung der Größe ΔE auch bei Leitfähigkeitsglowkurven verwandt werden kann und zwar auch dann, wenn $\beta \neq 0$ bzw. wie in dem hier angegebenen Fall sogar $\beta > \gamma$ gilt.

Eine Auswertung der in Ziffer 6 angegebenen Meßkurven nach der Formel (30) ergibt für eine Heizgeschwindigkeit von $0,5^\circ/\text{s}$ für

$$\text{CdS (Cu) 4: } \Delta E = 0,55 \text{ eV;}$$

$$\text{CdS (Co) 5: } \Delta E = 0,42 \text{ eV.}$$

Diese Werte stimmen gut mit den nach der in Ziffer 5 angegebenen Methode erhaltenen Werten überein. Sie verändern sich nur wenig mit der Heizgeschwindigkeit (die Temperaturen der Glowmaxima unterscheiden sich um etwa 6 %, wenn die Heizgeschwindigkeit sich von $0,1^\circ/\text{s}$ bis $1^\circ/\text{s}$ ändert) und nehmen in dem in Ziffer 7 behandelten Beispiel den in Gl. (30) angegebenen Wert an, wenn $\mu = 4,4^\circ/\text{s}$ beträgt.

9. Zusammenfassung

An einem einfachen reaktionskinetischen Modell, das nur eine Hafttermgruppe einheitlicher energetischer Lage enthält, konnte gezeigt werden, daß für die Behandlung von Leitfähigkeitsglowkurven durch Einführung der Näherungsannahmen $\frac{dn}{dt} \ll \frac{dh}{dt}$ und $n \ll h$ keine merklichen Fehler der Lösungsfunktionen resultieren.

Unter Verwendung des so genäherten Gleichungssystems wurde eine Methode zur Bestimmung von ΔE und γ (vgl. Abb. 1) entwickelt. Auch für hierbei eingeführte Näherungen wurde eine Fehlerabschätzung durchgeführt.

An einer Reihe von CdS-Einkristallen wurden Leitfähigkeitsglowkurven gemessen und die Messungen nach dieser Methode ausgewertet. Es ergab sich dabei, daß die systematischen Fehler, die durch Anwendung dieser Methode auftreten, für die Bestimmung von ΔE etwa 5 % betragen und für die Bestimmung von γ kleiner als 15 % sind.

Mit den erhaltenen Parametern wurden Lösungskurven des genäherten Gleichungssystems numerisch errechnet. Die dadurch erhaltenen Lösungs-

⁷⁾ K. W. Böer, S. Oberländer und J. Voigt, Z. Naturforsch. **13a**, 544 (1958).

funktionen stimmen hinsichtlich der Lage und Höhe ihres Maximums sehr gut mit dem experimentell ermittelten Glowmaximum überein. Die bei der Parameterbestimmung eingeführten Näherungen, insbesondere die Gln. (18) und (21) sind ausgezeichnet erfüllt.

Es zeigt sich, daß im angegebenen Beispiel der Füllungsgrad der Haftterme bei der Temperatur des Glowmaximums äußerst klein ist. Er beträgt nur etwa 2,5%. Dieser Füllungsgrad am Glowmaximum ist nahezu unabhängig von der Heizgeschwindigkeit.

Ein Vergleich mit den Ergebnissen von Randall und Wilkins zeigt, daß die von diesen Autoren für $\beta = 0$ abgeleitete Beziehung zur genäherten Bestimmung von ΔE aus Lumineszenzglowkurven auch für den Fall $0 \neq \beta > \gamma$ und auch für Leitfähigkeitsglowkurven recht gut erfüllt ist.

Anhang

Ein logarithmischer Zusammenhang, wie er zwischen der meßbaren Größe φ und der Temperatur des Glowmaximums τ besteht, kann auch für andere Meßgrößen wie z. B. für μ existieren (vgl. Ziff. 6).

Zur Fehlerabschätzung für einen solchen allgemeinen Fall geht man am zweckmäßigsten von Gl. (16) aus. Es folgt dann allgemein

$$\frac{1}{\tau} = - \frac{k}{\Delta E} \ln \varphi(\tau), \quad (I)$$

wobei

$$\varphi(\tau) = \frac{\nu}{u - \gamma k / \Delta E} \cdot \frac{\Delta E}{\gamma k} \frac{\alpha^*}{\beta - \gamma} \quad \text{für } \beta \neq \gamma \quad (IIa)$$

und

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\tau} \frac{d\mu}{d\tau} \frac{2k\bar{h}(t_0)}{H\Delta E} \alpha^* \quad \text{für } \beta = \gamma \quad (IIb)$$

ist. Bezeichnet $\psi(\tau)$ irgendeine definite meßbare Größe, die der Gesetzmäßigkeit

$$\frac{1}{\tau} \approx a \ln \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right) + b \quad (III)$$

genügt, und definiert man $\Phi(\tau) = \frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)}$, so ergibt sich mit der Korrekturfunktion

$$\varrho(\tau) = 1 - \frac{\Phi' \psi}{\Phi \psi'} \quad (IV)$$

exakt

$$\frac{d(1/\tau)}{d(\ln [\psi/\psi_0])} = - \frac{k}{\Delta E} \varrho(\tau), \quad (V)$$

wobei die Striche in Gl. (IV) Ableitungen nach der Temperatur τ des Glowmaximums und ψ_0 einen Dimensionsfaktor der gleichen Dimension wie ψ und vom Betrage 1 bedeuten.

Die Korrekturfunktion $\varrho(\tau)$ ist dann ungefähr gleich eins, wenn $\frac{\Phi' \psi}{\Phi \psi'} \ll 1$ wird. Es kommt darauf an, durch geschickte Wahl von ψ diese Bedingung weitgehend zu erfüllen.

Das ist beim untersuchten CdS in besonders gutem Maße erfüllt, wenn $\psi \equiv \nu$ gesetzt wird. Wird $\psi \equiv \mu$ angenommen, so ergibt sich zwar noch

$\varrho = \text{const}$, aber die Korrekturfunktion weicht bereits erheblich vom Wert 1 ab und beträgt hier etwa 0,7 bis 0,9.

Für viele anregende Diskussionen möchten wir Herrn Prof. Adiowitsch herzlich danken. Für die Vorbereitung dieser Untersuchungen und wertvolle Diskussionen danken wir Herrn Dipl.-Phys. H. Vogel.

Herrn Prof. Dr. R. Rompe und Herrn Prof. Dr. K. Schröder danken wir für die Ermöglichung dieser Arbeit in ihren Instituten und ihre fördernde Unterstützung.

Wir danken schließlich Herrn Prof. Dr. A. Walter für die Ermöglichung der numerischen Rechnungen am elektronischen Rechenautomaten IBM 650 in dem von ihm geleiteten Institut für praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt.

Berlin, II. Physikalisches Institut der Humboldt-Universität,
Laboratorium für die Physik des elektrischen Durchschlags

und

Forschungsinstitut für Mathematik, Abteilung angewandte Mathematik der
Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

Bei der Redaktion eingegangen am 13. Februar 1958.

Zur Theorie der Relaxation

II. Elektrische Netzwerkmodelle für das Relaxationsverhalten der Materie

Von Siegfried Kästner

Mit 20 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Es werden elektrische Netzwerke angegeben, die als Analogiemodelle für das Relaxationsverhalten eines beliebigen Systems Verwendung finden können. Sie sind im allgemeinsten Fall aus Induktivitäten bzw. Kapazitäten, Ohmschen Widerständen und idealen Übertragern aufgebaut. Danach werden einige Spezialfälle diskutiert, bei denen man ohne ideale Übertrager auskommt und die deshalb für den Aufbau von Analogie-Rechenmaschinen besondere Bedeutung besitzen. Schließlich werden noch speziell für theoretische Untersuchungen verwendbare Modelle abgeleitet, die sich durch eine besonders einfache Struktur auszeichnen, dafür aber teilweise negative Schaltelemente enthalten.

1. Einleitung

In einer vorangegangenen Arbeit¹⁾ wurde ein Beitrag zur thermodynamischen Theorie der Relaxation geliefert. Dabei zeigte es sich, daß die Grundgleichungen der Relaxation bzw. ihre mathematischen Ergebnisse als Tensorgleichungen in einem n -dimensionalen bzw. a -dimensionalen Raum gedeutet werden können, wobei n die Anzahl der Zustandsvariablen ist, die sich im einzelnen in a äußere und i innere Zustandsvariable gliedern. Das Relaxationsverhalten der Materie wird hierbei durch einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe vollständig erfaßt. Im Rahmen der Theorie sind insgesamt sechs Tensoren dieser Art von Bedeutung, und zwar innerhalb der Gruppen *Verschiebungsrelaxation* und *Kraftrelaxation* jeweils drei, die im einzelnen Funktionen der Zeit, der Frequenz bzw. der Spektralfrequenz sind. Ist einer dieser sechs Tensoren bekannt, so können die anderen durch Rechnung bestimmt werden.

Im folgenden soll zur Erläuterung des mathematischen Formalismus der Theorie eine anschauliche Darstellung durch elektrische Netzwerkmodelle abgeleitet werden. Dabei wird zunächst eine kurze Betrachtung über die möglichen Analogien durchgeführt. Anschließend wird — ausgehend von der mathematischen Lösung für den Fall der Verschiebungsrelaxation — ein Modell für den allgemeinen Fall entwickelt, daß a äußere und i innere Zustandsvariable auftreten. Es ist ein $2a$ -Pol, der sich aus Induktivitäten bzw. Kapa-

¹⁾ S. Kästner, Ann. Physik (7) 1, 377 (1958).

zitäten und Ohmschen Widerständen unter Verwendung von idealen Übertragern aufbauen läßt.

Danach wird der Spezialfall $a = 1$ behandelt, wobei das Netzwerk in den bekannten Zweipol²⁻⁵⁾ der skalaren Relaxationstheorie⁶⁾⁷⁾ übergeht, der keine idealen Übertrager erfordert. Anschließend werden noch zwei weitere Spezialfälle diskutiert, bei denen man ebenfalls ohne ideale Übertrager auskommt. Das ist einmal möglich für $a = 2$, falls die beiden Zustandsvariablen in symmetrischer Form auftreten und hat z. B. auf dem Gebiet der mechanischen Relaxation für ebene Formänderungen⁸⁾ isotroper Stoffe unter isothermen bzw. adiabatischen Verhältnissen Bedeutung. Zum anderen gelingt es auch für beliebiges a , falls zwischen den einzelnen Zustandsvariablen nur eine schwache Kopplung vorhanden ist.

Schließlich werden noch Netzwerke angegeben, die besonders für theoretische Untersuchungen geeignet sind. Sie zeichnen sich gegenüber den vorher behandelten Modellen durch besonders einfache Struktur aus, enthalten allerdings teilweise auch negative Schaltelemente.

2. Die thermodynamischen Grundgleichungen der Relaxation

Es sollen zunächst kurz die für den Aufbau der Netzwerkmodelle notwendigen thermodynamischen Grundgleichungen der Relaxation angegeben werden, wobei der Darstellung der vorangegangenen Arbeit¹⁾ gefolgt wird.

Das Relaxationsverhalten eines beliebigen Systems wird durch n Verschiebungen q^* beschrieben, die sich in einzelnen in a äußere Verschiebungen x^* und i innere Verschiebungen y^* gliedern.

$$\begin{aligned} q^* &= x^* & 0 &= y^* & \kappa &= 1, 2, \dots, a \\ q^* &= y^* & 0 &= x^* & \kappa &= a+1, a+2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2,1)$$

Sie sind Funktionen der Zeit t und mit den a äußeren Kräften des Systems K_κ

$$\begin{aligned} K_\kappa &\neq 0 & \kappa &= 1, 2, \dots, a \\ K_\kappa &= 0 & \kappa &= a+1, a+2, \dots, n \end{aligned} \quad (2,2)$$

durch lineare Differentialgleichungen verknüpft, die neben den q^* noch deren erste Ableitung nach der Zeit \dot{q}^* enthalten.

$$K_\kappa = \sum_\lambda A_{\kappa\lambda} q^\lambda + \sum_\lambda B_{\kappa\lambda} \dot{q}^\lambda. \quad (2,3)$$

Dabei kann in der Beziehung (2,3) — entsprechend den Rechenregeln des allgemeinen Tensorkalküls⁹⁾ — jeder griechische Index die Werte 1 bis n annehmen. Die Summen laufen deshalb ebenfalls von 1 bis n ¹⁰⁾. Die auf-

²⁾ E. Jenckel, Kolloid-Z. **134**, 47 (1953).

³⁾ G. Kegel, Kolloid-Z. **135**, 125 (1954).

⁴⁾ B. Gross, J. Polymer Sci. **20**, 371 (1956).

⁵⁾ S. Kästner, Kolloid-Z. **157**, 142 (1958).

⁶⁾ S. Kästner u. E. Schlosser, Kolloid-Z. **152**, 116 (1957).

⁷⁾ S. Kästner, Kolloid-Z. **157**, 133 (1958).

⁸⁾ C. B. Biezeno u. R. Grammel, Technische Dynamik Bd. I. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953, S. 104.

⁹⁾ A. Sommerfeld, Mechanik der deformierbaren Medien. Leipzig 1949, S. 358. E. Schrödinger, Space-Time Structure. Cambridge 1950.

¹⁰⁾ Von der Summationskonvention des allgemeinen Tensorkalküls wird in dieser Arbeit kein Gebrauch gemacht, da sie sich bei den Analogiebetrachtungen nicht bewährt.

tretenden Tensoren $A_{\kappa\lambda}$ und $B_{\kappa\lambda}$ sind symmetrisch

$$A_{\kappa\lambda} = A_{\lambda\kappa} \quad B_{\kappa\lambda} = B_{\lambda\kappa} \quad (2,4)$$

und von der Zeit unabhängig. Die quadratische Form U_2

$$U_2 = \frac{1}{2} \sum_{\kappa} \sum_{\lambda} A_{\kappa\lambda} q^{\kappa} q^{\lambda} \quad (2,5)$$

ist positiv definit oder positiv semidefinit. Sie stellt den quadratischen Term der Reihenentwicklung der inneren Energiedichte U nach den Verschiebungen q^{κ} dar. Andererseits ist die als Dissipationsfunktion bezeichnete quadratische Form D

$$D = \frac{1}{2} \sum_{\kappa} \sum_{\lambda} B_{\kappa\lambda} \dot{q}^{\kappa} \dot{q}^{\lambda} \quad (2,6)$$

positiv semidefinit, da zunächst in dem Ausgangskordinatensystem immer gilt

$$B_{1\kappa} = 0. \quad (2,7)$$

Im Spezialfall kann sie jedoch auch null sein. Sie ist ein Maß für die durch die lokalen irreversiblen Vorgänge im System verursachte zeitliche Zunahme der Entropiedichte S .

Im Rahmen der Modellbetrachtungen interessieren nur Lösungen von Beziehung (2,3) für den rein periodischen Fall. Zu diesem Zweck setzt man

$$q^{\kappa} = \operatorname{Re} \{q^{\kappa} e^{z t}\} \quad K_{\kappa} = \operatorname{Re} \{K_{\kappa} e^{z t}\}, \quad (2,8)$$

wobei Re den Realteil kennzeichnet. z ist eine komplexe Konstante, die im Spezialfall periodischer Vorgänge mit zeitlich konstanter Amplitude rein imaginär wird: $z = i\omega$. Dabei ist $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz und f die Frequenz. Mit dem Ansatz (2,8) geht die Formel (2,3) für die komplexen Amplituden q^{κ} , K_{κ} über in die Beziehung

$$K_{\kappa} = \sum_{\lambda} (A_{\kappa\lambda} + z B_{\kappa\lambda}) q^{\lambda}. \quad (2,9)$$

Löst man die Gl. (2,9) nach den Verschiebungen q^{κ} auf, so erhält man die Ausgangsbeziehung für das allgemeine Modell. Sie lautet

$$\mathfrak{r}^{\kappa} = \sum_l \mathfrak{R}^{\kappa l} \mathfrak{R}_l \quad (2,10)$$

mit dem *Modultensor der Verschiebungsrelaxation* $\mathfrak{R}^{\kappa l}$

$$\mathfrak{R}^{\kappa l} = \sum_{\kappa} \frac{c_{\kappa}^{\kappa} c_{\kappa}^l}{A'_{\kappa\kappa} + z B'_{\kappa\kappa}}, \quad (2,11)$$

wobei an Stelle der allgemeinen Verschiebungen q^{κ} nach Gl. (2,1) die analog Gl. (2,8) gebildeten komplexen Amplituden der *äußeren* Verschiebungen \mathfrak{r}^{κ} eingesetzt wurden, da man sich nur für den Verlauf dieser Größen interessiert. Zum Unterschied von den griechischen Indizes kann jeder lateinische Index nur die Werte 1 bis a annehmen, was auch bei den entsprechenden Summen zu beachten ist. Die in der Beziehung (2,11) auftretenden Konstanten $A'_{\kappa\kappa}$, $B'_{\kappa\kappa}$ sind positiv oder null, während die Größen c_{κ}^{κ} auch negative Werte annehmen können. Die Quotienten s_{κ}

$$s_{\kappa} = \frac{A'_{\kappa\kappa}}{B'_{\kappa\kappa}} \quad (2,12)$$

bezeichnet man als die (Kreis-)Frequenzen der Verschiebungsrelaxation. Insgesamt treten n Relaxationsfrequenzen auf, die jedoch nicht alle voneinander verschiedene Werte haben müssen. Im übrigen kann auch der Wert Null bzw. Unendlich vorkommen, falls A'_{xx} bzw. B'_{xx} entsprechend dem positiv semidefiniten Verhalten der quadratischen Form (2,5) bzw. (2,6) verschwindet.

3. Die thermodynamisch-elektrischen Analogien

Prinzipiell bestehen bei der Aufstellung von elektrischen Modellen für das Relaxationsverhalten eines Systems ohne mikroskopische Trägheitseffekte — wie von Kegel³⁾ speziell für die skalare (isotherme bzw. adiabatische) mechanische Relaxationstheorie eingehend untersucht wurde und ganz allgemein gültig ist — vier mögliche Analogien, und zwar zwei *vollständige*¹¹⁾ und zwei *unvollständige*. Davon besitzen die ersteren einen größeren Anwendungsbereich. Deshalb sollen hier — insbesondere im Hinblick auf anschließende Untersuchungen — nur die vollständigen Analogien benutzt werden. Im einzelnen unterscheidet man dabei die Analogie I und II, deren Grundgleichungen im folgenden angegeben werden.

Analogie I

Hierbei werden den Verschiebungsgeschwindigkeiten \dot{x}^k elektrische Spannungen U^k und den Kräften \mathfrak{K}_k elektrische Ströme \mathfrak{I}_k zugeordnet, wobei sämtliche Größen als komplexe Amplituden aufzufassen sind.

$$\dot{x}^k = z \, x^k = \alpha^k U^k \quad \mathfrak{K}_k = \beta_k \mathfrak{I}_k^{12}). \quad (3,1)$$

Die dabei auftretenden Konstanten α^k und β_k liegen zunächst nur dimensionsmäßig fest, für ihre zahlenmäßige Größe ergeben sich jedoch im Laufe der weiteren Rechnung zusätzliche Bedingungen.

Analogie II

In diesem Fall ist die Zuordnung umgekehrt.

$$\dot{x}^k = z \, x^k = \gamma^k \mathfrak{I}_k \quad \mathfrak{K}_k = \delta_k U_k^{12}). \quad (3,2)$$

Hinsichtlich der Konstanten γ^k , δ_k gilt das gleiche, das bei der Analogie I für α^k und β_k angegeben wurde.

4. Das allgemeine Modell

Analogie I

Setzt man die Gln. (3,1) und (2,11) in die Formel (2,10) ein, so folgt daraus eine Beziehung zwischen elektrischen Spannungen und Strömen.

$$U^k = \sum_i \sum_x \frac{z}{\alpha^k} \frac{c_x^k c_x^i}{A'_{xx} + z B'_{xx}} \beta_i \mathfrak{I}_i^{12}). \quad (4,1)$$

¹¹⁾ Die Begriffe *vollständige* und *unvollständige* Analogie wurden zwar ursprünglich nur für mechanisch-elektrische Analogien verwendet, ihre Bedeutung läßt sich jedoch unmittelbar auf den hier vorliegenden Fall verallgemeinern.

¹²⁾ Beziehungen der Art (3,1), (3,2) und (4,1) lassen sich nicht mehr als Tensorgleichungen deuten.

Im folgenden soll eine elektrische Schaltung angegeben werden, die auf die gleiche Beziehung führt.

Dabei wird zunächst von dem in Abb. 1 dargestellten idealen Übertrager¹³⁾ ausgegangen. Bei ihm bestehen folgende einfache Beziehungen zwischen den auftretenden Spannungen U , U' bzw. Strömen \mathfrak{I} , \mathfrak{I}' ¹⁴⁾

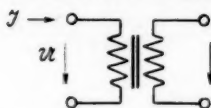


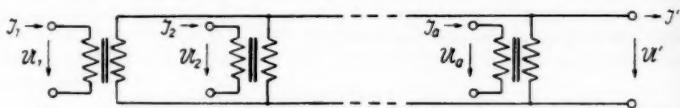
Abb. 1. Der ideale Übertrager

$$U = \ddot{u} U' \quad \mathfrak{I} = \frac{1}{\ddot{u}} \mathfrak{I}', \quad (4.2)$$

wobei \ddot{u} das Übersetzungsverhältnis des Übertragers darstellt, das durch das Verhältnis der Windungszahlen w , w' bestimmt wird

$$\ddot{u} = \frac{w}{w'}, \quad (4.3)$$

und je nach Wicklungssinn von w und w' positive oder negative Werte annehmen kann. Schaltet man a ideale Übertrager mit dem Übersetzungsverhältnis \ddot{u}^k

Abb. 2. Parallelschaltung von a idealen Übertragern

entsprechend Abb. 2 sekundärseitig parallel, so folgt für die Sekundärspannung U'

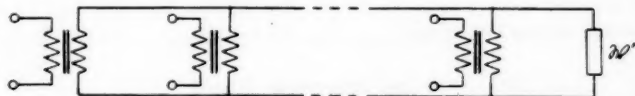
$$U' = U'^k = \frac{1}{\ddot{u}^k} U^k \quad (4.4)$$

und andererseits für den Sekundärstrom \mathfrak{I}'

$$\mathfrak{I}' = \sum_k \mathfrak{I}'_k = \sum_k \ddot{u}^k \mathfrak{I}_k, \quad (4.5)$$

während primärseitig die Spannungen U^k und die Ströme \mathfrak{I}_k auftreten. Wird dieser $2(a+1)$ -Pol nach Abb. 3 sekundärseitig durch einen komplexen Widerstand \mathfrak{B}' abgeschlossen, so gilt

$$U' = \mathfrak{B}' \mathfrak{I}' \quad (4.6)$$

Abb. 3. Parallelschaltung von a idealen Übertragern bei sekundärseitigem Abschluß

und man kann aus den Beziehungen (4.4) bis (4.6) Sekundärspannung U' und Sekundärstrom \mathfrak{I}' eliminieren. Man erhält für den entstandenen $2a$ -Pol die Gleichung

$$U^k = \sum_l \mathfrak{B}' \ddot{u}^k \ddot{u}^l \mathfrak{I}_l. \quad (4.7)$$

¹³⁾ Ein idealer Übertrager ist gegenüber einem realen Übertrager im wesentlichen durch folgende vier Eigenschaften ausgezeichnet: 1. Streng lineares Verhalten; 2. Keine Ohmschen Verluste; 3. Kein magnetischer Streufluß; 4. Eingangsinduktivität bei ausgangssseitigem Leerlauf ist unendlich groß.

¹⁴⁾ W. Cauer, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. Berlin 1954.

Schaltet man anschließend n 2a-Pole dieser Art entsprechend Abb. 4 primärseitig hintereinander, so addieren sich die einzelnen Anteile hinsichtlich der Spannungen, so daß man als Ergebnis folgende Formel gewinnt:

$$u^k = \sum_l \sum_x \mathfrak{B}'_x \dot{u}_x^k \mathfrak{S}_l. \quad (4,8)$$

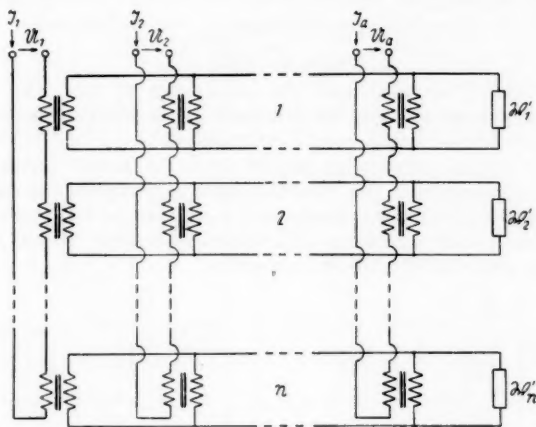


Abb. 4. Prinzipschaltbild des allgemeinen Modells (Analogie I)

Dabei ist \mathfrak{B}'_x der Abschlußwiderstand des Sekundärkreises x und \dot{u}_x^k das Übersetzungsverhältnis der Übertrager zwischen Primärkreis k und Sekundärkreis x .

Wählt man schließlich für \mathfrak{B}'_x speziell die in Abb. 5 dargestellte Parallelschaltung einer Induktivität L'_x mit einem Ohmschen Widerstand R'_x , so ergibt sich

$$\mathfrak{B}'_x = \frac{z}{1/L'_x + z 1/R'_x} \quad (4,9)$$

und Gl. (4,8) geht damit über in

$$u^k = \sum_l \sum_x z \frac{\dot{u}_x^k \dot{u}_x^l}{1/L'_x + z 1/R'_x} \mathfrak{S}_l. \quad (4,10)$$

Ein qualitativer Vergleich der Beziehung (4,10) mit der Ausgangsformel (4,1) zeigt, daß damit eine geeignete Schaltung zur Modelldarstellung des Relaxationsverhaltens der Materie gefunden ist. Für einen quantitativen Vergleich ist einerseits notwendig, daß zwischen den vorn eingeführten Konstanten α^k, β_k die Zusatzbedingung

$$\alpha^k \beta_k = 1 \quad (4,11)$$

erfüllt ist. Andererseits ist die Zuordnung zwischen den thermodynamischen und den elektrischen Größen noch nicht eindeutig und man muß n neue

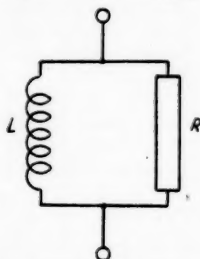


Abb. 5. Parallelschaltung von Induktivität L und Ohmschen Widerstand R

Konstanten ε_x einführen. Man setzt zunächst durch Vergleich der Nenner der Beziehungen (4,1) und (4,10)

$$1/L'_x = \varepsilon_x A'_{xx} \quad 1/R_x = \varepsilon_x B'_{xx}, \quad (4,12)$$

woraus man die im Modell auftretenden Induktivitäten und Ohmschen Widerstände berechnen kann. Wird die Gl. (4,12) in die Formel (4,10) eingeführt, so folgt daraus unter Beachtung der Beziehung (4,11) die Bestimmungsgleichung für die Übersetzungsverhältnisse \ddot{u}_x^k der auftretenden Übertrager.

$$\ddot{u}_x^k = \sqrt{\varepsilon_x \beta_k c_x^k}. \quad (4,13)$$

Ist eines der c_x^k null, so wird auch das zugehörige \ddot{u}_x^k null. Der betreffende Übertrager fällt dann weg und die primären Anschlußklemmen werden überbrückt.

In Abb. 6 ist das vollständige Modell für das Relaxationsverhalten angegeben, wobei entsprechend den Ausführungen im Anschluß an Gl. (2,12) als Beispiel der Fall angenommen wurde, daß $n-2$ endliche von null verschiedene Relaxationsfrequenzen auftreten und außerdem jeweils einmal die Relaxationsfrequenz Null und Unendlich vorkommt.

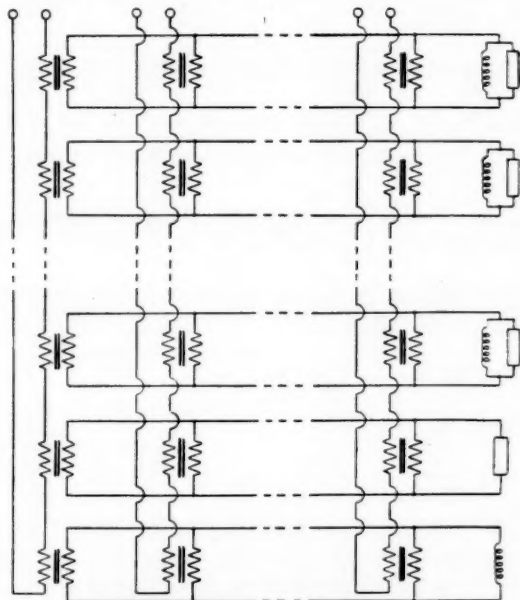


Abb. 6. Das allgemeine Modell (Analogie I)

Schließlich sei noch erwähnt, daß man a parallel geschaltete ideale Übertrager nach Cauer¹⁴⁾ immer durch einen Übertrager mit $a+1$ Wicklungen ersetzen kann. Die Schaltung der Abb. 6 läßt sich deshalb noch etwas vereinfachen, wobei an Stelle von $a \cdot n$ Übertragern nur n Übertrager mit je $a+1$ Wicklungen auftreten.

Analogie II

Wird die entsprechende Variablenzuordnung (3,2) in die Grundgleichungen der Verschiebungsrelaxation (2,10), (2,11) eingesetzt, so folgt daraus eine Beziehung zwischen Spannungen und Strömen, bei der im Vergleich zu Formel (4,1) im wesentlichen nur zugeordnete Spannungen und Ströme miteinander vertauscht sind.

$$\mathfrak{R}^k = \sum_i \sum_x \frac{z}{\gamma^k} \frac{c_x^k c_x^i}{A_{xx} + z B_{xx}} \delta_i u_i. \quad (4,14)$$

Das bedeutet, daß das Modell in diesem Fall durch die zur Abb. 6 *duale Schaltung*¹⁵⁾ gebildet wird. Den Ausgangspunkt der Ableitung bildet die in Abb. 7

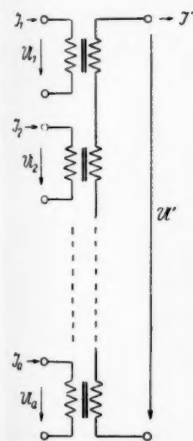


Abb. 7. Reihenschaltung von a idealen Übertragern

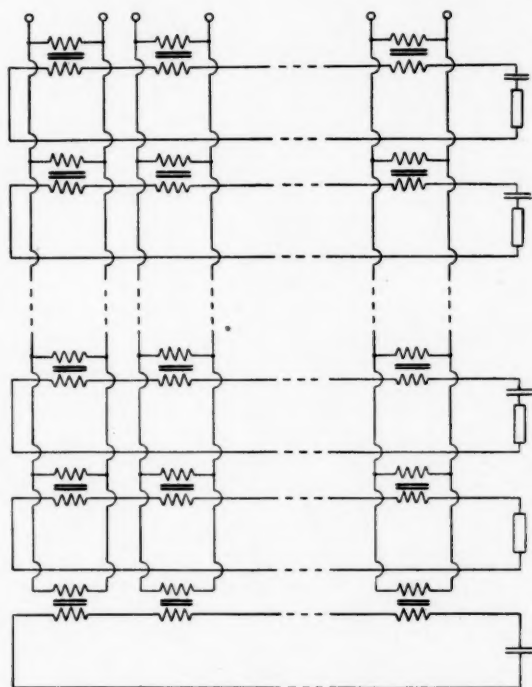


Abb. 8. Das allgemeine Modell (Analogie II)

angegebene Reihenschaltung von a idealen Übertragern und entsprechende Überlegungen ergeben das in Abb. 8 dargestellte Modell, wobei wiederum der oben angegebene Spezialfall zeichnerisch dargestellt wurde.

¹⁵⁾ Das Verhalten zweier $2n$ -Pole nennt man *dual* (bzw. widerstandsreziprok), wenn die Widerstandsmatrix des einen $2n$ -Pols bis auf einen konstanten positiven Faktor gleich der Leitwertmatrix des anderen ist.

Die in der Schaltung auftretenden Kapazitäten C'_x und Ohmschen Leitwerte G'_x werden durch folgende Gleichung bestimmt:

$$1/C'_x = \zeta_x A'_{xx} \quad 1/G'_x = \zeta_x B'_{xx}. \quad (4,15)$$

Dabei treten entsprechend den Größen ε_x bei der Analogie I n willkürliche Konstanten ζ_x auf. Für die reziproken Übersetzungsverhältnisse v_x^k

$$v_x^k = \frac{1}{\bar{u}_x^k} \quad (4,16)$$

folgt andererseits die Beziehung

$$v_x^k = \sqrt{\zeta_x} \delta_k c_x^k, \quad (4,17)$$

wobei analog zur Gl. (4,11) die Bedingung

$$\gamma^k \delta_k = 1 \quad (4,18)$$

zu beachten ist. Auch bei diesem Modell läßt sich noch eine Vereinfachung derart durchführen, daß an Stelle der $a \cdot n$ Übertrager nur a Übertrager mit je $n+1$ Wicklungen auftreten.

5. Spezielle Modelle

Nachdem bisher das allgemeine Netzwerkmodell für beliebige Anzahl äußerer und innerer Variabler und beliebige Größe der auftretenden Konstanten aufgestellt wurde, sollen nunmehr einige Spezialfälle diskutiert werden, die dadurch ausgezeichnet sind, daß bei ihnen keine idealen Übertrager notwendig sind. Sie besitzen deshalb für den Aufbau von Analogie-Rechenmaschinen besonderes Interesse.

Im einzelnen handelt es sich hierbei um folgende Spezialfälle:

1. Es tritt nur eine äußere Zustandsvariable auf.
2. Es treten nur zwei äußere Zustandsvariable auf, die außerdem nur symmetrisch in die Grundgleichungen eingehen.
3. Zwischen den (in beliebiger Anzahl auftretenden) verschiedenen Zustandsvariablen besteht nur eine schwache Kopplung.

51. Eine äußere Zustandsvariable

Es soll zunächst der Fall $a = 1$ behandelt werden. Er führt auf die bekannten Modelle²⁻⁵⁾ der skalaren Relaxationstheorie⁶⁾⁷⁾, die eine Reihe wichtiger Relaxationsvorgänge umfaßt. Hierzu gehören auf mechanischem Gebiet bei isotropen Stoffen die reine Scherung und das isotherme bzw. adiabatische Verhalten bei isotroper Kompression und einfacher Dehnung, die z. B. zur Deutung der Ausbreitungskonstanten von Scher- und Kompressionswellen dienen. Außerdem beschreibt die skalare Theorie auch das (mechanisch-)thermische Verhalten beliebig anisotroper Medien bei konstanten Spannungen bzw. Deformationen. Andererseits erfaßt sie auf elektrischem Gebiet die dielektrischen Eigenschaften isotroper Medien und das entsprechende (dielektrisch-)thermische Verhalten beliebig anisotroper Medien bei konstanter Feldstärke bzw. dielektrischer Verschiebung.

Analogie I

Setzt man bei dem in Abb. 6 dargestellten allgemeinen Modell $a = 1$, so geht es in die Schaltung der Abb. 9 über. Sie läßt sich noch weiter vereinfachen, da man jeden der sekundären Abschlußwiderstände auf die Primärseite transformieren kann. Damit werden die idealen Übertrager überflüssig und das endgültige Modell für $a = 1$ erhält schließlich die in Abb. 10 dargestellte einfache Form. Dabei gelten für die auftretenden Schaltelemente die Bestimmungsgleichungen

$$1/L'_* = \frac{\alpha^1}{\beta_1} \frac{A'_{**}}{(c^1_*)^2} \quad 1/R'_* = \frac{\alpha^1}{\beta_1} \frac{B'_{**}}{(c^1_*)^2}, \quad (51,1)$$

wobei zu beachten ist, daß in dem vorliegenden Spezialfall die Bedingung (4,11) nicht erforderlich ist.

Hinsichtlich der Relaxationsfrequenzen Null und Unendlich läßt sich das Relaxationsverhalten für den Spezialfall $a = 1$ durch vier Stoffklassen kennzeichnen, die in Abb. 11 dargestellt sind. Werden neben den diskreten Schaltelementen noch kontinuierlich verteilte Glieder zugelassen, was dem Fall kontinuierlicher Relaxationspektren entspricht, so treten — wie an anderer Stelle¹⁰⁾ abgeleitet wurde — insgesamt neun Stoffklassen auf.

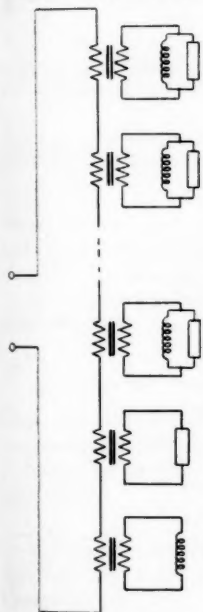


Abb. 9. Das allgemeine Modell für den Spezialfall, daß nur eine äußere Zustandsvariable auftritt (Analogie I)

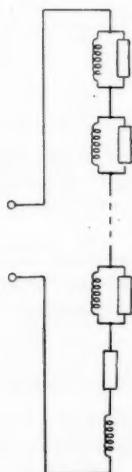


Abb. 10. Das Modell für den Spezialfall, daß nur eine äußere Zustandsvariable auftritt (Analogie I)

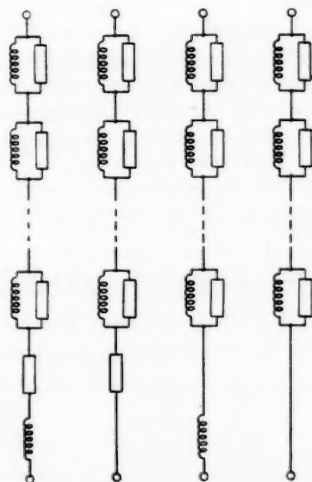


Abb. 11. Die vier Stoffklassen (Analogie I)

¹⁰⁾ E. Schlosser u. S. Kästner, Kolloid-Z. 155, 97 (1957).

Schließlich sei noch erwähnt, daß zu der in Abb. 10 dargestellten Reihenschaltung noch eine *äquivalente* Parallelschaltung¹⁷⁾ mit gleicher Anzahl Induktivitäten und Ohmschen Widerständen existiert, die in Abb. 12 angegeben ist und hinsichtlich der vier Stoffklassen die Schaltungen der Abb. 13 ergibt.

Analogie II

Bei Anwendung der Analogie II führen entsprechende Untersuchungen für den hier behandelten Spezialfall auf das in Abb. 14 dargestellte Modell

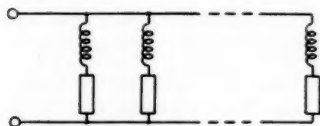


Abb. 12. Eine zum Modell der Abb. 10 äquivalente Schaltung (Analogie I)

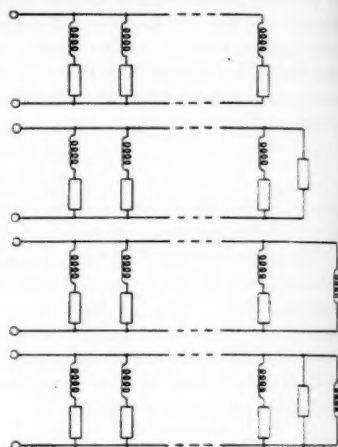


Abb. 13. Die vier Stoffklassen des äquivalenten Modells (Analogie I)

mit der zur Abb. 10 dualen Schaltung. Für die Schaltelemente ergeben sich die Beziehungen

$$1/C'_x = \frac{\gamma^1 A'_{xx}}{\delta_1 (c_n^1)^2} \quad I/G'_x = \frac{\gamma^1 B'_{xx}}{\delta_1 (c_n^1)^2} \quad (51,2)$$

Zu dieser Parallelschaltung existiert — analog dem Fall der Analogie I — eine äquivalente Reihenschaltung mit gleicher Anzahl Kapazitäten und Ohmschen Widerständen, die in Abb. 15 angegeben ist.

Weiterhin lassen sich nach den Gesetzen der dualen Netzwerke sofort die Schaltungen der vier Stoffklassen angeben, auf die jedoch nicht näher eingegangen werden soll.

52. Zwei äußere Zustandsvariable in symmetrischer Form

Nachdem im letzten Kapitel der Fall $a = 1$ untersucht wurde, soll nunmehr ein weiterer Spezialfall behandelt

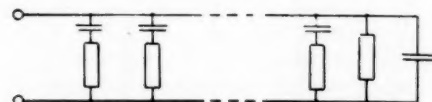


Abb. 14. Das Modell für den Spezialfall, daß nur eine äußere Zustandsvariable auftritt (Analogie II)

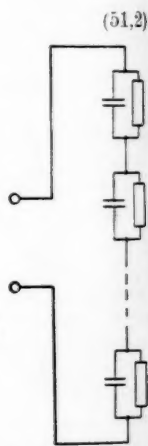


Abb. 15. Eine zum Modell der Abb. 14 äquivalente Schaltung (Analogie II)

¹⁷⁾ Zwei Schaltungen bezeichnet man als *äquivalent*, wenn sie bei verschiedenem Struktur nach außen hin gleiches Frequenzverhalten zeigen.

werden, bei dem man ebenfalls ohne ideale Übertrager auskommt. Er läßt sich im Unterschied zu jenem nicht unmittelbar aus dem allgemeinen Modell der Abb. 6 bzw. 8 entwickeln, es soll deshalb zunächst eine kurze mathematische Ableitung vorangestellt werden.

Der vorliegende Spezialfall wird gekennzeichnet durch die Anzahl der auftretenden äußeren Zustandsvariablen

$$a = 2 \quad (52,1)$$

und die Symmetriebedingung

$$\Re^{11} = \Re^{22} \quad (52,2)$$

für den Modultensor der Verschiebungsrelaxation \Re^{kl} . Er entspricht z. B. auf dem Gebiet der mechanischen Relaxation den ebenen Formänderungen^{5) 8)} isotroper Stoffe unter isothermen bzw. adiabatischen Bedingungen. Die Beziehung (52,2) bedeutet nach Formel (2,11), daß für die im Zähler des Modultensors der Verschiebungsrelaxation \Re^{kl} auftretenden Größen c_{κ}^k die Bedingung

$$(c_{\kappa}^1)^2 = (c_{\kappa}^2)^2 \quad (52,3)$$

besteht, die durch die beiden Lösungen

$$c_{\kappa}^1 = \pm c_{\kappa}^2 \quad (52,4)$$

erfüllt werden kann. Tritt dabei nur die Lösung mit dem positiven Zeichen auf, so ergibt sich bei Vergleich von Formel (2,11)

$$\Re^{11} = \Re^{22} = \Re^{12}, \quad (52,5)$$

während das negative Zeichen auf die Beziehung

$$\Re^{11} = \Re^{22} = -\Re^{12} \quad (52,6)$$

führen würde. Im allgemeinsten Fall werden jedoch bei den einzelnen κ positive und negative Lösungen von Gl. (52,4) vorkommen. Faßt man davon sämtliche Glieder mit positiver Lösung in einem Term \Re^+ zusammen und die übrigen Glieder mit negativer Lösung in dem Term \Re^- , so ergibt sich ganz allgemein

$$\begin{aligned} \Re^{11} &= \Re^{22} = \Re^+ + \Re^- \\ \Re^{12} &= \Re^+ - \Re^- \end{aligned} \quad (52,7)$$

Dabei enthalten \Re^+ und \Re^- im Zähler nur positive Faktoren. Sie haben damit die gleiche Gestalt wie \Re^{11} beim Spezialfall $a = 1$. Sie können deshalb durch Zweipole der in Abb. 10 bzw. Abb. 14 angegebenen Form modellmäßig realisiert werden.

Analogie I

Werden die Beziehungen (52,7) und die Variablenzuordnung (3,1) in die Grundgleichung der Relaxation (2,10) eingesetzt, so gewinnt man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u^1 &= \frac{z}{\alpha^1} (\Re^+ + \Re^-) \beta_1 \Im_1 + \frac{z}{\alpha^1} (\Re^+ - \Re^-) \beta_2 \Im_2 \\ u^2 &= \frac{z}{\alpha^2} (\Re^+ - \Re^-) \beta_1 \Im_1 + \frac{z}{\alpha^2} (\Re^+ + \Re^-) \beta_2 \Im_2. \end{aligned} \quad (52,8)$$

Ein Modell, das auf die gleiche Beziehung führt, läßt sich sofort angeben, wenn man die in Abb. 16 dargestellte X-Schaltung eines Vierpols näher betrachtet.

Ihr entspricht das Gleichungssystem¹⁸⁾

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^1 &= \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2) \mathfrak{I}_1 + \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2) \mathfrak{I}_2 \\ \mathcal{U}^2 &= \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2) \mathfrak{I}_1 + \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2) \mathfrak{I}_2, \end{aligned} \quad (52,9)$$

wobei die Anordnung der komplexen Widerstände $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ der Abb. 16 zu entnehmen ist. Für eine quantitative Auswertung ergeben sich zunächst für die in den Gln. (52,8) auftretenden Konstanten $\alpha^1, \alpha^2, \beta_1, \beta_2$ gewisse notwendige Bedingungen

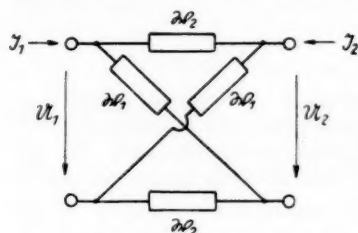


Abb. 16. Prinzipschaltbild des Modells für den Spezialfall, daß zwei äußere Zustandsvariable in symmetrischer Form auftreten (Analogie I und II)

$$\alpha^1 = \alpha^2 = \alpha \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta, \quad (52,10)$$

die jedoch im Anschluß an die vorausgesetzte Symmetrieeigenschaft (52,2) keine zusätzliche Beschränkung darstellen. Für die auftretenden komplexen Widerstände folgen schließlich die einfachen Bestimmungsgleichungen

$$\mathfrak{B}_1 = 2 \frac{\beta}{\alpha} z \Re^+ \quad \mathfrak{B}_2 = 2 \frac{\beta}{\alpha} z \Re^- \quad (52,11)$$

und die einzelnen Schaltelemente werden — unter Berücksichtigung des Faktors 2 — nach Formel (51,1) berechnet.

Das Ergebnis läßt sich folgendermaßen zusammenfassen: Das allgemeine Modell für den durch die Gln. (52,1) und (52,2) definierten Spezialfall gewinnt man, wenn man von der in Abb. 16 angegebenen Vierpol-X-Schaltung ausgeht und für die darin auftretenden Zweipole die in Abb. 10 dargestellte Schaltung verwendet.

Analogie II

Der Vierpol der Abb. 16 ist auch im Falle der Analogie II als Modell geeignet. Die Ergebnisse lassen sich unmittelbar übertragen. Für die komplexen Leitwerte $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ der in dem Vierpol auftretenden Zweipole folgt dabei analog zu den Gleichungen (52,11)

$$\mathfrak{G}_1 = 2 \frac{\delta}{\gamma} z \Re^+ \quad \mathfrak{G}_2 = 2 \frac{\delta}{\gamma} z \Re^-, \quad (52,12)$$

wobei die Bedingung

$$\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma \quad \delta_1 = \delta_2 = \delta \quad (52,13)$$

zu beachten ist. In diesem Fall haben die Zweipole die in der Schaltung der Abb. 14 angegebene Form und die einzelnen Schaltelemente werden nach Beziehung (51,2) bestimmt.

§53. Schwache Kopplung zwischen den einzelnen Zustandsvariablen

Im folgenden soll noch ein weiterer Spezialfall diskutiert werden, für den sich ebenfalls ein Netzwerk ohne ideale Übertrager angeben läßt. Zum Unterschied von sämtlichen bisher behandelten Modellen wird dabei nicht von der Lösung der Grundbeziehungen der Relaxation (2,10) (2,11) ausgegangen, sondern unmittelbar von den Grundgleichungen (2,9) die noch alle Verschiebungen enthalten.

¹⁸⁾ R. Feldtkeller, Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik. Leipzig 1948.

Der vorliegende Spezialfall wird dadurch gekennzeichnet, daß zwischen sämtlichen Zustandsvariablen nur eine schwache Kopplung auftreten soll. Da sich die inneren Zustandsvariablen jedoch durch eine geeignete mathematische Transformation entkoppeln lassen, bedeutet dies genauer gesagt, daß nur sämtliche äußeren Zustandsvariablen unter sich und jede äußere mit jeder inneren Zustandsvariablen schwache Kopplung aufweisen sollen. In der mathematischen Formulierung der Grundgleichungen (2,9) heißt schwache Kopplung, daß die Diagonalelemente der Tensoren $A_{\kappa\lambda}$ und $B_{\kappa\lambda}$ hinreichend groß sind. Dabei sollen im einzelnen die Beziehungen

$$\begin{aligned} A_{\kappa\kappa} (\alpha^*)^2 &\geq \sum_{\lambda} |A_{\kappa\lambda}| \alpha^* \alpha^{\lambda} \\ B_{\kappa\kappa} (\alpha^*)^2 &\geq \sum_{\lambda} |B_{\kappa\lambda}| \alpha^* \alpha^{\lambda} \end{aligned} \quad (53,1)$$

erfüllt sein, wobei der Strich an den Summenzeichen bedeutet, daß in der Summe der Term $\kappa = \lambda$ nicht auftreten soll.

Für die Anzahl der vorhandenen äußeren Zustandsvariablen besteht dagegen in diesem Fall keine einschränkende Bedingung.

Analogie I

Erweitert man die in Gl. (3,1) definierte Zuordnung der Variablen auf sämtliche Verschiebungen q^* und geht damit in die Grundgleichung (2,9) ein, so folgt daraus eine Beziehung zwischen elektrischen Spannungen U^* und Strömen \mathfrak{I}_* :

$$\mathfrak{I}_* = \sum_{\lambda} \frac{1}{z \beta_{\kappa}} \mathfrak{A}_{\kappa\lambda} \alpha^{\lambda} U^{\lambda} \quad (53,2)$$

$$\mathfrak{A}_{\kappa\lambda} = A_{\kappa\lambda} + z B_{\kappa\lambda}. \quad (53,3)$$

Im folgenden soll eine elektrische Schaltung angegeben werden, die auf die gleiche Beziehung führt.

Dabei werde zunächst von n isolierten Zweipolen ausgegangen, deren Leitwerte entsprechend Abb. 17 mit \mathfrak{G}_* bezeichnet werden sollen. Diese n Ausgangszweipole werden

anschließend durch eine Anzahl weiterer Zweipole miteinander zu einem Netzwerk verknüpft. Und zwar schaltet man zwischen jedes Paar beliebig herausgegriffener Ausgangszweipole jeweils

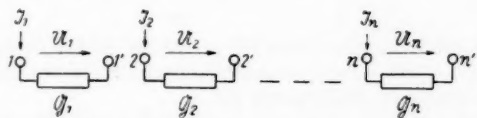


Abb. 17. Die n Ausgangszweipole des Modells für den Spezialfall schwacher Kopplung (Analogie I)

vier neue Zweipole, in der in Abb. 18 angegebenen Art. Da sich bei n Elementen insgesamt $(n-1)n/2$ verschiedene Paare wählen lassen, werden damit $4(n-1)n/2 = 2(n-1)n$ neue Zweipole zugeschaltet, deren Leitwerte je nach Lage mit $\mathfrak{G}_{\kappa\lambda}$, $\mathfrak{G}_{\kappa\lambda'}$, $\mathfrak{G}_{\kappa'\lambda}$, $\mathfrak{G}_{\kappa'\lambda'}$ bezeichnet werden und paarweise gleich sind.

$$\mathfrak{G}_{\kappa\lambda} = \mathfrak{G}_{\kappa'\lambda'} \quad \mathfrak{G}_{\kappa\lambda'} = \mathfrak{G}_{\kappa'\lambda} = \mathfrak{G}_{\lambda'\kappa}. \quad (53,4)$$

Für den an der Klemme κ in dieses Netzwerk fließenden Strom \mathfrak{I}_κ ergibt sich nach den Kirchhoffschen Regeln

$$\mathfrak{I}_\kappa = \mathfrak{G}_\kappa (\varphi_\kappa - \varphi'_\kappa) + \sum_\lambda \mathfrak{G}_{\kappa\lambda} (\varphi_\kappa - \varphi_\lambda) + \sum_{\lambda'} \mathfrak{G}'_{\kappa\lambda} (\varphi_\kappa - \varphi'_{\lambda'}), \quad (53,5)$$

wobei φ_κ bzw. φ'_κ das Potential der Klemme κ bzw. κ' ist. Für den entsprechenden Strom \mathfrak{I}'_κ folgt andererseits

$$\mathfrak{I}'_\kappa = \mathfrak{G}_\kappa (\varphi'_\kappa - \varphi_\kappa) + \sum_\lambda \mathfrak{G}'_{\kappa\lambda} (\varphi'_\kappa - \varphi_\lambda) + \sum_{\lambda'} \mathfrak{G}_{\kappa\lambda} (\varphi'_\kappa - \varphi'_{\lambda'}). \quad (53,6)$$

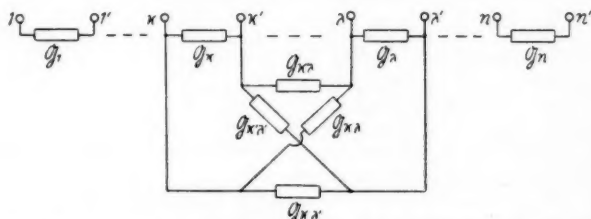


Abb. 18. Die Verknüpfung der κ Ausgangszweipole des Modells für den Spezialfall schwacher Kopplung (Analogie I)

Beachtet man dabei, daß

$$\mathfrak{I}_\kappa = -\mathfrak{I}'_\kappa \quad (53,7)$$

ist, so kann man an Stelle der Potentiale $\varphi_\kappa, \varphi'_\kappa$ die Klemmenspannungen \mathfrak{U}^κ

$$\mathfrak{U}^\kappa = \varphi_\kappa - \varphi'_\kappa \quad (53,8)$$

einführen. Zu diesem Zweck multipliziert man Gl. (53,6) mit -1 und addiert sie zu Gl. (53,5). Das Ergebnis lautet nach Multiplikation mit $1/2$

$$\mathfrak{I}_\kappa = \sum_\lambda \overline{\mathfrak{G}}_{\kappa\lambda} \mathfrak{U}^\lambda, \quad (53,9)$$

wobei die Größen $\overline{\mathfrak{G}}_{\kappa\lambda}$ durch folgende Beziehungen bestimmt werden:

$$\overline{\mathfrak{G}}_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2} (\mathfrak{G}'_{\kappa\lambda} - \mathfrak{G}_{\kappa\lambda}) \quad \kappa \neq \lambda \quad (53,10)$$

$$\overline{\mathfrak{G}}_{\kappa\lambda} = \mathfrak{G}_\kappa + \frac{1}{2} \sum_{\lambda'} (\mathfrak{G}_{\kappa\lambda'} + \mathfrak{G}'_{\kappa\lambda'}) \quad \kappa = \lambda. \quad (53,11)$$

Wählt man schließlich für sämtliche in dem Netzwerk auftretenden Zweipole die in Abb. 5 angegebene Parallelschaltung von einer Induktivität L mit einem Ohmschen Widerstand R

$$\mathfrak{G}_{\kappa\lambda} = 1/z L_{\kappa\lambda} + 1/R_{\kappa\lambda} \quad (53,12)$$

$$\mathfrak{G}'_{\kappa\lambda} = 1/z L'_{\kappa\lambda} + 1/R'_{\kappa\lambda} \quad (53,13)$$

$$\mathfrak{G}_\kappa = 1/z L_\kappa + 1/R_\kappa, \quad (53,14)$$

so ist ein geeignetes Modell für die Darstellung des Relaxationsverhaltens gefunden, wobei für eine quantitative Anwendung wiederum die Bedingung (4,11) erfüllt sein muß.

Es werden zunächst die Induktivitäten $L_{\kappa\lambda}, L'_{\kappa\lambda}$ und die Ohmschen Widerstände $R_{\kappa\lambda}, R'_{\kappa\lambda}$ der Koppelzweipole bestimmt. Durch Vergleich der Be-

ziehungen (53,9), (53,10), (53,12) und (53,13) mit den Formeln (53,2), (53,3) ergibt sich, daß man dabei je nach Vorzeichen von $A_{\kappa\lambda}$ und $B_{\kappa\lambda}$ vier Fälle unterscheiden muß. Die formelmäßigen Ergebnisse sind im folgenden zusammengestellt:

$A_{\kappa\lambda}$	$B_{\kappa\lambda}$	$1/L_{\kappa\lambda}$	$1/R_{\kappa\lambda}$	$1/L'_{\kappa\lambda}$	$1/R'_{\kappa\lambda}$
+	+	0	0	$2 \alpha^* \alpha^\lambda A_{\kappa\lambda}$	$2 \alpha^* \alpha^\lambda B_{\kappa\lambda}$
+	—	0	$-2 \alpha^* \alpha^\lambda B_{\kappa\lambda}$	$2 \alpha^* \alpha^\lambda A_{\kappa\lambda}$	0
—	+	$-2 \alpha^* \alpha^\lambda A_{\kappa\lambda}$	0	0	$2 \alpha^* \alpha^\lambda B_{\kappa\lambda}$
—	—	$-2 \alpha^* \alpha^\lambda A_{\kappa\lambda}$	$-2 \alpha^* \alpha^\lambda B_{\kappa\lambda}$	0	0

(53,15)

Die Schaltungen der vier Fälle sind der Abb. 19 zu entnehmen.

Werden die Beziehungen (53,15) anschließend in die Formel (53,11) eingesetzt, so lassen sich auch die Induktivitäten L_{κ} und Ohmschen Widerstände R_{κ} der Ausgangszweipole bestimmen. Die Ergebnisse lauten

$$1/L_{\kappa} = A_{\kappa\kappa} (\alpha^*)^2 - \sum_{\lambda} |A_{\kappa\lambda}| \alpha^* \alpha^\lambda \quad (53,16)$$

$$1/R_{\kappa} = B_{\kappa\kappa} (\alpha^*)^2 - \sum_{\lambda} |B_{\kappa\lambda}| \alpha^* \alpha^\lambda. \quad (53,17)$$

Nach Voraussetzung (53,1) werden diese niemals negativ.

Analogie II

Für den Fall der Analogie II existiert keine entsprechende Modellschaltung.

6. Elektrische Ersatzschaltungen

Sämtlichen bisher diskutierten Modellen war gemeinsam, daß sie aus positiven Schaltelementen bestehen. Daneben lassen sich auch Modelle angeben, die strukturell noch einfacher gebaut sind, dafür aber zum Teil negative Schaltelemente enthalten. Modelle dieser Art, die besonders für theoretische Untersuchungen geeignet sind, sollen elektrische Ersatzschaltungen genannt werden. Auf diese soll noch kurz eingegangen werden.

Geht man dabei analog zur Ableitung des allgemeinen Modells der Abb. 6 bzw. der Abb. 8 von der Lösung der Grundgleichungen der Relaxation aus, so liefern die in Abb. 20 (speziell für $\alpha = 2, 3, 4$) dargestellten 2α -Pole bei Verwendung beider Analogien geeignete Ersatzschaltungen. Sie stellen die Verallgemeinerung der bekannten Vierpol-II-Schaltung¹⁸⁾ dar und lassen sich gewinnen, wenn man α isolierte Zweipole zunächst einseitig verbindet und anschließend

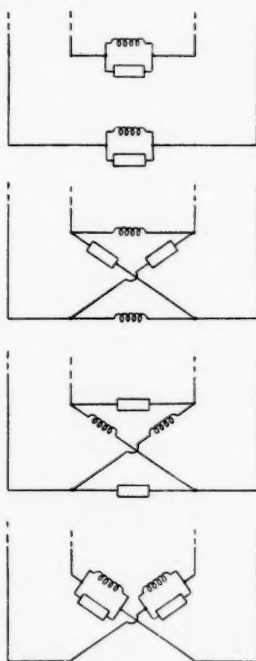


Abb. 19. Die vier möglichen Fälle bei der Verknüpfung der Ausgangszweipole des Modells für den Spezialfall schwacher Kopplung (Analogie I)

alle nichtverbundenen Zweipolklemmen jeweils paarweise durch $(a-1)a/2$ weitere Zweipole miteinander verknüpft. Dabei haben sämtliche in diesem Netzwerk auftretenden Zweipole im Falle der Analogie I (abgesehen vom Vorzeichen der Schaltelemente) die in Abb. 10 angegebene Gestalt und werden aus der mathematischen Lösung für die Kraftrelaxation ermittelt. Im Fall der Analogie II besitzen die Zweipole dagegen die in Abb. 14 dargestellte Form und werden nach den vorn angegebenen Regeln aus der Lösung für die Verschiebungsrelaxation bestimmt.

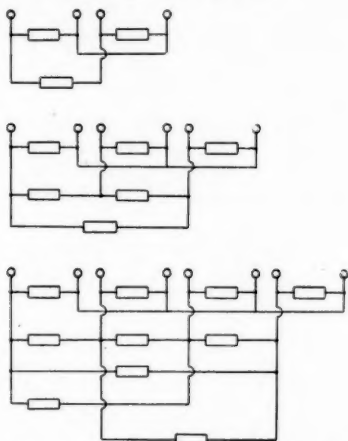


Abb. 20. Prinzipschaltbild für elektrische Ersatzschaltungen (Analogie I und II)

Geht man direkt von den Grundgleichungen der Relaxation aus, so tritt bei Anwendung der Analogie I als Ersatzschaltung wieder das im letzten Kapitel behandelte Modell auf, wobei jedoch nur die Induktivitäten L_x und Ohmschen Widerstände R_x der Ausgangszweipole auch negative Werte annehmen können, während sich im Fall der Analogie II keine einfache Ersatzschaltung angeben läßt.

Berlin-Adlershof, Institut für Kunststoffe der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Bei der Redaktion eingegangen am 13. März 1958.

auf

Es
prober
Hyste
relativ
wenn
d. h. 1
hande
einstin
Bloch
Weiß

Ma
magne
bei D
teresse
den E
magne
haben
sich d
im M
der M
mecha
Einflu
lung a
angege
Befun

1)
2)
3)
4)
5)

— 1) $a/2$
n diesem
nen vom
alt und
rmittelt.
4 darge-
aus der

Über den Einfluß von Magnetfeldglühungen auf das magnetische Verhalten und die Bereichsstruktur polykristalliner Ringproben aus Perminvar

Von Kurt Motzke

Mit 6 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Es wurde untersucht, unter welchen Bedingungen polykristalline Ringproben aus normalem Perminvar durch Magnetfeldglühungen eine rechteckige Hystereseschleife erhalten. Dabei ergab sich, daß die höchsten Werte der relativen Remanenz und der maximalen Permeabilität erhalten werden, wenn das Magnetfeld während der Abkühlung der Probe erst bei etwa 550° C, d. h. 170° C unterhalb der Curietemperatur, angelegt wird. Bei dem so behandelten Material zeigte die Anwendung der Bitterstreifen-Methode in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Williams und Goertz¹⁾, daß große Blochwände in Form konzentrischer Ringe die ganze Probe in einige wenige Weißsche Bereiche unterteilen.

1. Einleitung

Magnetfeldglühungen werden heutzutage vielfach angewendet, um bei magnetischem Material starke einachsige Anisotropien zu erzeugen, die sowohl bei Dauermagneten als auch bei weichmagnetischen Werkstoffen von Interesse sind. Kelsall²⁾ und Dillinger und Bozorth³⁾ untersuchten als erste den Einfluß näher, den während der Glühung anwesende Magnetfelder auf die magnetischen Eigenschaften verschiedener weichmagnetischer Legierungen haben, nachdem bereits 1913 Pender und Jones⁴⁾ feststellen konnten, daß sich die maximale Permeabilität von Eisen und Silicium-Eisen durch Glühen im Magnetfeld ändert. Bozorth und Dillinger versuchten auch, die bei der Magnetfeldglühung beobachteten Effekte zu erklären, und zwar durch mechanische Spannungen, die in den bei höheren Temperaturen unter dem Einfluß des Magnetfeldes plastisch verformten Kristalliten nach der Abkühlung auftreten. Aber sowohl diese Theorie als auch die später von Kaya⁵⁾ angegebene Deutung stehen teilweise in starkem Gegensatz zu experimentellen Befunden. Eine wesentlich befriedigendere Erklärung läßt sich aus der neuer-

¹⁾ H. J. Williams u. M. Goertz, J. appl. Phys. **23**, 316 (1952).

²⁾ G. A. Kelsall, Physics **5**, 169 (1934).

³⁾ J. F. Dillinger u. R. M. Bozorth, Physics **6**, 279 (1935).

⁴⁾ H. Pender u. R. L. Jones, Physic. Rev. **1**, 259 (1913).

⁵⁾ S. Kaya, Rev. mod. Physics **25**, 49 (1953).

dings unabhängig voneinander von Néel⁶⁾ sowie Taniguchi und Yamamoto⁷⁾ vorgeschlagenen Bildung einer Orientierungsüberstruktur ableiten. Die ersten und wohl auch einzigen bisher veröffentlichten Untersuchungen der magnetischen Bereichsstruktur magnetfeldgeglühter Ringe aus polykristallinem Material führten Williams und Goertz¹⁾ im Jahre 1951 an Proben aus normalem Perminvar durch. Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit war es, die günstigsten Bedingungen für die Magnetfeldglühung von normalem Perminvar zu finden und eine Bestätigung der von Williams und Goertz bei ihren Untersuchungen gefundenen magnetischen Bereichsstrukturen zu erbringen.

2. Die Magnetfeldglühung

Die zu den Untersuchungen verwendeten Ringe aus polykristallinem Perminvar der ungefähren Zusammensetzung 22 % Co, 35 % Fe, 43 % Ni hatten einen äußeren und einen inneren Radius von 11 mm bzw. 8 mm und eine

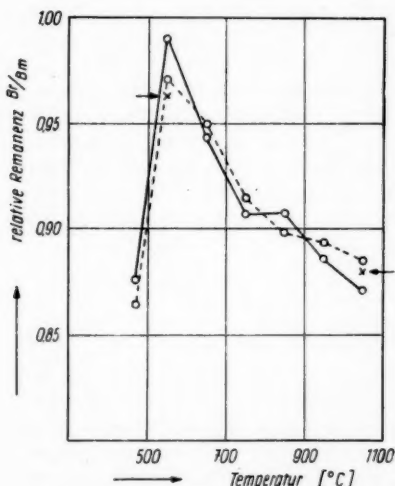


Abb. 1. Abhängigkeit der relativen Remanenz B_r/B_m von der Temperatur, bei der das Magnetfeld während der Abkühlung angelegt wird. B_r ist die Remanenz und B_m die Magnetisierung bei 16 Oe, die 15600 G beträgt. --- Alle Glühungen mit derselben Probe ausgeführt. — Für jede Glühung eine andere, noch nicht magnetfeldgeglühte Probe verwendet. $\rightarrow \times$: Mittelwerte von je 15 Glühungen

bzw. bei 1050° C angeschaltet worden war. Die gemessenen relativen Remanenzen sind in Abb. 1 dargestellt in Abhängigkeit von der Temperatur, bei der

⁶⁾ L. Néel, J. Physique Radium **15**, 225 (1954).

⁷⁾ S. Taniguchi u. M. Yamamoto, Sci. Rep. Res. Inst. Tohoku Univ. A **6**, 390 (1954).

das M
liche
stark.
Glüh
Eine
höher

Es
Werte
etwa
Bozo
nur d
halten
Permi
20 %
glüh
Effekt
Perme
diese
liegen
darauf
konnt

W
geglü
Hyste
entma
wesen
Weiß
ist.
ringer
schrie
feldgl
magnet
lung
ansch
magn
diese
falls
der B
schwa
wänd
Prob
chem
sind,
der M
die s
ausbi

das Magnetfeld angelegt wurde. Für die Permeabilität ergab sich eine ähnliche Temperaturabhängigkeit. Die einzelnen Meßwerte streuten ziemlich stark. Bei 550°C lag z. B. die relative Remanenz nach den 15 verschiedenen Glühungen zwischen 0,94 und 0,99 und bei 1050°C zwischen 0,86 und 0,91. Eine Abnahme der relativen Remanenz bei Anlegen des Magnetfeldes bei höheren Temperaturen ist jedoch eindeutig daraus zu entnehmen.

Es ist zunächst unverständlich, daß, wie aus Abb. 1 hervorgeht, die höchsten Werte der relativen Remanenz erreicht werden, wenn das Magnetfeld erst etwa 170°C unterhalb der Curietemperatur (720°C) eingeschaltet wird. Bozorth und Dillinger stellten bei ihren Untersuchungen³⁾, bei denen sie nur die Abhängigkeit der maximalen Permeabilität betrachteten, dieses Verhalten nicht fest. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß sie ihre Messungen an Perminvar mit anderer Legierungszusammensetzung (60 % Co, 20 % Fe, 20 % Ni) durchführten. In der Arbeit von Kelsall¹²⁾, der die Magnetfeldglühung an Permalloy untersuchte, ist allerdings eine Andeutung dieses Effektes vorhanden. Kelsall erhielt z. B. den Höchstwert der maximalen Permeabilität von 60100, wenn er das Magnetfeld bei 575°C anlegte, wogegen diese nur 59300 betrug, wenn das Feld bei 600°C eingeschaltet wurde. Jedoch liegen hier die Unterschiede wohl noch in den Fehlergrenzen, so daß sich daraus keine sicheren Schlüsse ziehen lassen. Eine Erklärung für diesen Effekt konnte noch nicht gefunden werden.

3. Die magnetische Bereichsstruktur

Williams und Goertz zeigten in ihrer Arbeit¹⁾, daß ein magnetfeldgeglühter Ring aus polykristallinem Perminvar, der eine rechteckförmige Hystereseschleife besitzt, im entmagnetisierten Zustand im wesentlichen nur in zwei große Weißsche Bereiche unterteilt ist. An einigen Perminvarringen, die auf die oben beschriebene Weise der Magnetfeldglühung unterzogen (Magnetfeld während der Abkühlung bei 550°C angelegt) und anschließend sorgfältig entmagnetisiert wurden, konnte diese Bereichsanordnung ebenfalls beobachtet werden. Bei der Beobachtung wurde stets ein

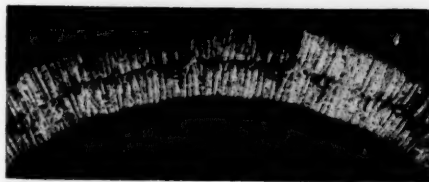


Abb. 2. Ringförmige Blochwand auf einem entmagnetisierten magnetfeldgeglühten Ring aus polykristallinem Perminvar. Die Probe hatte eine rechteckförmige Hystereseschleife mit einer relativen Remanenz von 0,98

schwaches Magnetfeld senkrecht zur Probenoberfläche angelegt, das die Blochwände deutlicher hervortreten läßt. Abb. 2 zeigt einen Abschnitt einer solchen Probe. Eine einzige ringförmige Blochwand teilt sie in zwei Teile von etwa gleichem Volumen, die in verschiedener Richtung ebenfalls ringförmig magnetisiert sind, der eine im Uhrzeigersinn, der andere entgegengesetzt dazu. Die Richtung der Magnetisierung erkennt man aus den streifenförmigen Kolloidablagerungen, die sich stets senkrecht zur Magnetisierung des darunterliegenden Bereiches ausbilden und in der gezeigten Abbildung radial verlaufen. Es handelt sich

also um eine sogenannte 180° -Wand, und die Magnetisierung der Probe in Ringrichtung geht so vor sich, daß beim Anlegen eines Feldes die Wand nach innen oder nach außen verschoben wird. Abb. 3 zeigt die gleiche Bereichsanordnung noch einmal an einem anderen Ring bei höherer Vergrößerung, bei der die streifenförmigen Kolloidablagerungen deutlich zu erkennen sind. An einigen Proben konnten auch mehrere ringförmige Wände im entmagnetisierten Zustand beobachtet werden. In Abb. 4 sieht man, wie diese sich fast ungestört über die Korngrenzen hinweg fortsetzen.

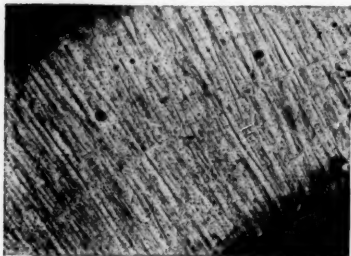


Abb. 3. Dasselbe wie Abb. 2 an einem anderen Ring bei höherer Vergrößerung



Abb. 4. Teil eines Perminvarringes mit mehreren Blochwänden im entmagnetisierten Zustand. Die Wände überqueren fast ungehindert die Korngrenzen

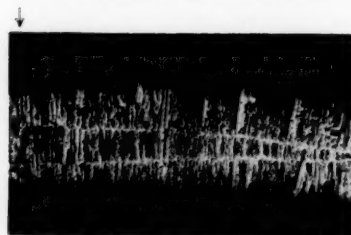


Abb. 5. Dolchförmiger Bereich entgegengesetzter Magnetisierung an einem Riß in der Probe. Der Riß ist am Rande der Abbildung durch zwei Pfeile gekennzeichnet

Die Abb. 5 und 6 bringen Beispiele für Ummagnetisierungskeime auf magnetfeldgeglühten Perminvarringen. Die Proben befanden sich bei diesen Beobachtungen im Zustand der Remanenz. Der Keim in Abb. 5 bildete sich an einem Riß in der Probe, der in der Abbildung durch zwei Pfeile gekennzeichnet ist. In diesem Falle erwies es sich bei der Beobachtung als zweckmäßig, das von außen angelegte Feld so zu wählen, daß das Streufeld der Blochwand annähernd kompensiert wird, so daß die Wand als heller, fast vollkommen kolloidfrier Streifen erscheint, der sich gut von der dunklen Umgebung abhebt. Abb. 6 zeigt Keime, bei denen zum Teil ein keimbildendes Zentrum nicht zu sehen ist. Es kann sich hierbei um mechanisch verspannte Gebiete oder auch um Löcher und Fremdkörper unter der Oberfläche handeln. Bemerkenswert ist, daß diese Keime meist in der Nachbarschaft anderer großer Gebiete entgegengesetzter Magnetisierung beobachtet werden. Zwei der in Abb. 6 sichtbaren Keime (durch Pfeile gekennzeichnet) haben sich an einem radial in die Probenoberfläche eingefallenen Graben gebildet, der außerhalb des Gesichtsfeldes liegt.

Herrn Dipl.-Phys. H. Gengnagel möchte ich an dieser Stelle meinen besonderen Dank aussprechen für die Herstellung der zu diesen Untersuchungen verwendeten Legierung.

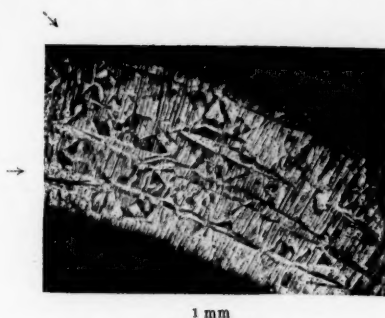


Abb. 6. Ummagnetisierungskeime, bei denen z. T. ein keimbildendes Zentrum nicht zu sehen ist. Die durch Pfeile gekennzeichneten Bereiche bildeten sich an einem radial in die Probensoberfläche gefeilten Graben, der außerhalb des Gesichtsfeldes liegt

Jena, Institut für Magnetische Werkstoffe der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Bei der Redaktion eingegangen am 20. März 1958.

Die Größe der effektiven Ionisierungsspannung in Quecksilberhochdruckbögen

Von W. Neumann

Mit 4 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Die experimentellen Methoden zur Bestimmung der effektiven Ionisierungsspannung in Quecksilberhochdruckbögen der Autoren R. Borchert, R. Rompe, P. Schulz und W. Thouret; W. Elenbaas; R. Rompe, W. Weizel und P. Schulz werden in den Abschnitten 2–5 ausführlich besprochen und auf ihre Stichhaltigkeit überprüft. Dabei ergibt sich, daß nur die nach R. Rompe, W. Weizel und P. Schulz sowie nach R. Rompe, P. Schulz und W. Thouret bestimmten Werte für die effektive Ionisierungsspannung genügend sicher begründet sind und für elektrodenstabilisierte Quecksilberhochdruckbögen bei einer Elektronendichte von $n_e \approx 2,9 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ etwa 9,8 V betragen. Dieser Wert stimmt gut mit dem nach der Theorie von H. Unsöld berechneten Wert überein.

1. Einleitung

Die Kenntnis der effektiven Ionisierungsspannung im Plasma ist wichtig für genauere Berechnungen der verschiedenen Teilchenkonzentrationen und damit zur Berechnung von Transportvorgängen, der kontinuierlichen Strahlung und der Spektrallinienv Verbreiterung im Plasma.*)

Neuere Theorien zur Herabsetzung der Ionisierungsspannung in Plasma liegen von H. Unsöld¹⁾, G. Ecker und W. Weizel²⁾³⁾, O. Theimer⁴⁾ sowie von G. Baumann⁵⁾ vor, wobei für die Berechnungen das Wasserstoffatommodell verwendet wurde.

H. Unsöld berechnete, daß die Potentialkurve zwischen je 2 Z-fach geladenen Atomkernen, die einen Abstand von $r_m = \left(\frac{4\pi}{3} n_e\right)^{-\frac{1}{3}}$ (entsprechend dem mittleren Abstand zwischen einem Atom und dem nächstgelegenen posi-

*) Im Verlaufe der Arbeit wird wegen der geringen Anzahl von entsprechenden Experimenten und der relativ geringen Genauigkeit ihrer Ergebnisse angenommen, daß die durch verschiedene Formulierungen definierten Werte für die effektive Ionisierungsspannung übereinstimmend sind.

¹⁾ H. Unsöld, Z. Astrophysik **24**, 355 (1948).

²⁾ G. Ecker u. W. Weizel, Ann. Physik (6) **17**, 126 (1956).

³⁾ G. Ecker u. W. Weizel, Z. Naturforsch. **12a**, 859 (1957).

⁴⁾ O. Theimer, Z. Naturforsch. **12a**, 518 (1957).

⁵⁾ G. Baumann, Diss. Stuttgart 1956; s. auch H. J. Kaeppler u. G. Baumann, Mitt. Forschungsinst. Physik Strahlantriebe E. V. Nr. 8, 14 (1956).

tiven Ion) haben, in der Mitte ein Maximum hat, das um

$$\Delta U_{\text{Unsöld}} = Z^{\frac{1}{2}} \cdot 0,7 \cdot \left(\frac{n_e}{10^{18}} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ Volt} \quad (1)$$

unterhalb der Nulllinie liegt, und identifizierte diesen Wert mit der Größe der Erniedrigung der Ionisierungsspannung. Für nicht-wasserstoffähnliche Atome ist Z durch Z_{eff} zu ersetzen.

G. Ecker und W. Weizel²⁾ berechneten die Wechselwirkungsenergie der positiven und negativen Ladungsträger des Plasmas unter Berücksichtigung der Polarisationsenergie nach Debye und Hückel. Die elektrostatische Wechselwirkungsenergie wurde wie die eines kubisch raumzentrierten Ionengitters (Madelungkonstante $\alpha = 1,76$) angenommen. Für die Größe der Erniedrigung der Ionisierungsspannung ergibt sich dann (für $Z = 1$):

$$\Delta U_{\text{Ecker, Weizel}} = \Delta U_{\text{Pol}} + \Delta U_{\text{estat}} \quad (2)$$

mit

$$\Delta U_{\text{Pol}} = 0,37 \left(\frac{Ne}{10^{14} \cdot T} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ Volt} \quad (2a)$$

und

$$\Delta U_{\text{estat}} = 0,67 \left(\frac{Ne}{10^{18}} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ Volt.} \quad (2b)$$

O. Theimer⁴⁾ und G. Baumann⁵⁾ berücksichtigten nur den Polarisationsanteil der Wechselwirkungsenergie und erhielten abgesehen von einem etwas veränderten Zahlenfaktor eine Erniedrigung der Ionisierungsspannung entsprechend Gl. (2a).

D. E. Inglis und R. Teller⁶⁾ berechneten die Laufzahl n_e des letzten diskreten Spektralterms eines Atoms im Plasma unter der Annahme, daß der nächste Term durch linearen Starkeffekt, hervorgerufen durch die Anwesenheit benachbarter Elektronen und Ionen, so stark verbreitert ist, daß ein Elektron von diesem Term kontinuierlich zu den nächsthöheren Termen gelangen kann, also frei zu betrachten ist. Der zu dem Grenzterm der Laufzahl n_e gehörende Termwert beträgt (in Volt)

$$\Delta U_{\text{Inglis, Teller}} = 1,01 \cdot 10^{-8} n_e^{0,2666} \text{ Volt für } T < 86,3 \cdot n_e^{0,1333}. \quad (3)$$

Für $n_e = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ ergibt sich hierfür ein Wert von 0,63 V. Er ist nur unwesentlich kleiner als der Wert nach Unsöld (0,70 V) oder der Wert entsprechend dem elektrostatischen Anteil an der Erniedrigung der Ionisierungsspannung nach Ecker-Weizel entsprechend Gl. (2b) (0,67 V). Für den Polarisationsanteil entsprechend Gl. (2a) wird dagegen bei $T = 10^4 \text{ °K}$ nur 0,37 V erhalten.

Entsprechend den Gln. (1–3) ist zu erwarten, daß für übliche Hochdruckbögen, bei denen die Temperaturen sich nicht viel voneinander unterscheiden, die Herabsetzung der Ionisierungsspannung im wesentlichen durch die Ladungsträgerdichte bestimmt ist.

Die Zahl der Arbeiten, in denen die Größe der effektiven Ionisierungsspannung experimentell untersucht wird, ist gering. Die entsprechenden Arbeiten sind in der Arbeit von G. Ecker und W. Weizel²⁾ referiert.

⁴⁾ D. E. Inglis u. R. Teller, *Astrophys. J.* **90**, 439 (1939).

W. Elenbaas⁷⁾ fand bei Gradientenuntersuchungen an wandstabilisierten Hg-Hochdruckbögen mit relativ geringer Leistungsdichte, bei Drücken von 3 bis 90 at eine Erniedrigung der Ionisierungsspannung von 0,01 bis 1,09 V. R. Rompe, P. Schulz und W. Thouret⁸⁾ erhielten bei einem elektrodenstabilisierten Hg-Hochdruckbogen großer Leistungsdichte eine Erniedrigung der Ionisierungsspannung von 0,9 V. R. Rompe, W. Weizel und P. Schulz⁹⁾ schlossen aus dem Verschwinden von Linien mit hohen Ausgangstermen, daß für einen elektrodenstabilisierten Hg-Hochdruckbogen bei etwa 35 at und bei einer Leistungsdichte von etwa 35 kW/cm³ die Erniedrigung der Ionisierungsspannung 0,7 V beträgt.

Gegenüber diesen experimentell gefundenen großen Werten für die Erniedrigung der Ionisierungsspannung, die die Theorien nach H. Unsöld, G. Ecker und W. Weizel und D. E. Inglis und R. Teller zu bestätigen schienen, wurde von R. Borchert¹⁰⁾ bei elektrodenstabilisierten Hg-Hochdruckbögen nur eine Erniedrigung um etwa 0,3 V gefunden, was wiederum die Annahmen von O. Theimer und G. Baumann zu bestätigen schien. Die von W. Göing, H. Meier und H. Meinen¹¹⁾ gefundene Tatsache, daß in der unter normaler Stromstärke betriebenen Hg-Höchstdrucklampe HBO 200 noch Spektrallinien (allerdings mit sehr geringer Intensität) auftraten, deren obere Anregungsspannung mit $U_a = 10,1$ V nur 0,3 V kleiner ist als die ideale Ionisierungsspannung, kann nicht als Kriterium für die Gültigkeit der Annahmen von O. Theimer und G. Baumann gewertet werden, da zur Emission der betreffenden Spektrallinien nicht nur die zentralen Teile, sondern auch die Randteile des Bogens, die eine relativ geringe Ladungsträgerdichte haben, beitrugen.

In dieser Arbeit sollen die Voraussetzungen geprüft werden, unter denen die verschiedenen Autoren die effektive Ionisierungsspannung bestimmt haben.

2. Grundlagen für die Auswertung der Borchertschen Messungen zur Bestimmung der effektiven Ionisierungsspannung

Die effektive Ionisierungsspannung im elektrodenstabilisierten Quecksilberhochdruckbogen wurde von R. Borchert¹⁰⁾ nach Messungen der temperatur- und druckabhängigen Leitfähigkeit und der Strahlung der im nahen Ultrarot gelegenen Spektrallinien der Wellenlängen 10140, 11287, 12070 und 13670 Å bei verschiedenen Bogenstromstärken bestimmt. Zur Erzeugung des Bogens dienten Quecksilberhöchstdrucklampen der Typen HBO 500 und HBO 200¹²⁾. Sie brannten mit normaler Stromstärke und wurden für die Zeit, in der die Messungen erfolgten, kurzzeitig mit einer größeren bzw. kleineren Stromstärke betrieben.

⁷⁾ W. Elenbaas, Philips Res. Rep. **2**, 442 (1947).

⁸⁾ R. Rompe, P. Schulz, W. Thouret, Z. Physik **112**, 369 (1939); P. Schulz, Z. Physik **119**, 167 (1942).

⁹⁾ R. Rompe u. P. Schulz, Z. Physik **110**, 223 (1938); P. Schulz u. W. Weizel, Z. Physik **122**, 697 (1944).

¹⁰⁾ R. Borchert, Ann. Physik (6) **7**, 321 (1950).

¹¹⁾ W. Göing, H. Meier, H. Meinen, Z. Physik **140**, 376 (1955).

¹²⁾ R. Rompe u. W. Thouret, Das Licht, 7–10 (1944).

Die Berechnung der Leitfähigkeit erfolgte aus den Meßwerten für Strom, Spannung und Kanaldurchmesser $2R$ (entsprechend der optischen Halbwertsbreite). Die Feldstärke wurde aus der Brennspannung berechnet, indem diese um 12 (für die HBO 500) bzw. 10 V (für die HBO 200) entsprechend der Summe aus Anoden- und Kathodenfall vermindert und durch den Elektrodenabstand dividiert wurde.

Zur Messung der Linienstrahlung wurde der mittlere Teil des Bogens auf den Eintrittspalt eines Monochromators abgebildet und die durch den Austrittspalt gelangende Strahlung mittels Thermoelement und schnell-schwingendem Spiegelgalvanometer (Empfindlichkeit $5 \cdot 10^{-9}$ A/mm) gemessen. Dabei gelangte Strahlung aus einem Gebiet der Länge $2R$ zur Messung.

Für die Linienstrahlung S_L gilt dann bei vernachlässigbarer Absorption:

$$S_L \sim R \cdot n_0 \exp\left(-\frac{e U_a}{k T}\right) \sim R \cdot p \cdot T^{-1} \exp\left(-\frac{e U_a}{k T}\right) \cdot \frac{1-x}{1+x}. \quad (4)$$

Hierbei bedeuten: R = Kanalaradius, n_0 = Neutralteilchendichte, p = Gesamtdruck, U_a = Anregungsspannung der Spektrallinie, x = Ionisationsgrad. Für die Leitfähigkeit gilt:

$$\sigma = \frac{e^2}{\sqrt{3} m k T} \cdot \frac{n}{n_0 Q_0 + n_i Q_i}.$$

Wegen des geringen Ionisationsgrades (Größenordnung 1%) und des großen Wirkungsquerschnitts der Hg-Atome gegenüber Stößen mit thermischen Elektronen ($Q_0 \approx 1,2 \cdot 10^{-14}$ cm² nach Brode¹³) kann näherungsweise $Q_i = Q_0 = Q$ = konstant gesetzt werden. Das ergibt:

$$\sigma = \frac{e^2}{\sqrt{3} m k T} \cdot \frac{x}{Q}, \quad (5)$$

und mit $x \sim p^{\frac{1}{2}} \cdot T^{\frac{5}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{e U_i}{2 k T}\right)$ wird

$$\sigma \sim p^{\frac{1}{2}} \cdot T^{\frac{5}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{e U_i}{2 k T}\right) \quad (6)$$

erhalten. (4) und (6) werden nun logarithmiert:

$$-\frac{e U_a}{k T} \cdot \log 2,72 = B_0 + \log(S_L T R^{-1} p^{-1} (1+x)) \equiv B(T) \quad (7)$$

$$-\frac{e U_i}{2 k T} \cdot \log 2,72 = A_0 + \log(\sigma \cdot T^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}}) \equiv A(T). \quad (8)$$

Hierbei sind A_0 und B_0 Konstanten, die für die weitere Auswertung willkürlich angenommen werden können. $(1+x)$ steht an Stelle von $\frac{1+x}{1-x}$. Differenzierung von (7) nach (8) ergibt:

$$\frac{d B(T)}{d A(T)} = \frac{U_a}{U_i}. \quad (9)$$

Wird $B(T)$ als Funktion von $2A(T)$ aufgetragen, ergibt sich aus der Neigung der durch die Meßpunkte hindurchgelegten Verbindungslinie (in 1. Näherung

¹³) R. Brode, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 125, 134 (1929).

eine Gerade) der Wert $U_a:U_i$, aus dem bei bekannter Anregungsspannung der Spektrallinie die effektive Ionisierungsspannung bestimmt werden kann (s. Abb. 2).

Um Gl. (9) der Borchertschen Formulierung anzupassen, wird aus dem Differentialquotienten der Differenzenquotient für 2 Zustände 1 und 2 entsprechend 2 verschiedenen Bogenstromstärken gebildet:

$$\frac{U_a}{U_i} = \frac{\Delta B(T)}{2 \Delta A(T)} = \frac{1}{2} \frac{\log \frac{S_{L2}}{S_{L1}} + \log \frac{T_2}{T_1} - \log \frac{R_2}{R_1} - \log \frac{P_2}{P_1} + \log \frac{1+2x_2}{1+2x_1}}{\log \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{3}{4} \log \frac{T_2}{T_1} + \frac{1}{2} \log \frac{P_2}{P_1}} \quad (9a)$$

Um Gl. (9) bzw. Gl. (9a) anwenden zu können, ist es notwendig, außer den unmittelbar den Messungen zu entnehmenden Werten für die Linienstrahlung S_L , den Kanalaradius R und die Leitfähigkeit σ Werte für den Druck p und für die Temperatur T zu kennen. Die Temperatur kann aus der Beziehung für die Leitfähigkeit als Funktion der Temperatur Gl. (6) berechnet werden, wobei der Druck näherungsweise als konstant angenommen wird und für die Ionisierungsspannung näherungsweise 9,7 V eingesetzt wird. Da die Beziehung (6) nur für relative Temperaturänderungen verwendet werden kann, wurde die Temperatur im normalen Betriebszustand für die HBO 500 nach Messungen von R. Rompe und P. Schulz (s. P. Schulz¹⁴) zu 7660° K und für die HBO 200 nach Messungen von W. Göing¹⁵ zu 8000° K eingesetzt.

Der Druck im normalen Betriebszustand läßt sich aus dem Spannungsgradienten und den von R. Rompe und W. Thouret¹⁶ erhaltenen Umrechnungskurven für die HBO 500 zu etwa 35 at ermitteln. Für die HBO 200 wird ein Druck von ungefähr 60 at angenommen.

Um eventuell während des Umschaltens der Bogenstromstärke auftretende Druckänderungen feststellen zu können, wurde die vom Gradienten abhängige Brennspannung kontrolliert. Obwohl hiernach keine Druckänderungen gefunden wurden ist es durchaus möglich, daß geringe Druckänderungen auftraten, für die das Verfahren zu unempfindlich ist. Denn in die Brennspannung geht außer dem druckempfindlichen Gradienten noch die effektive Bogenlänge ein, die durch geringfügige Verlagerung des Kathodenansatzes ebenfalls geändert wird. Aber schon eine geringfügige Druckänderung geht sehr empfindlich in die Auswertung ein.

Für den speziellen Fall, daß der Druck in der Lampe beim Umschalten der Stromstärke und für die Zeit der Messung entsprechend der Borchertschen Annahme konstant geblieben war, ergibt sich aus Gl. (9a):

$$\begin{aligned} \frac{U_a}{U_i} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\log \left(\frac{S_{L2}}{S_{L1}} \right) + \log \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + \log \left(\frac{1+2x_2}{1+2x_1} \right)}{\log \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) - \frac{3}{4} \log \left(\frac{T_2}{T_1} \right)} \\ &\approx \frac{1}{2} \cdot \frac{\log \left(\frac{S_{L2}}{S_{L1}} \right) + \log \left(\frac{T_2}{T_1} \right)}{\log \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) - \frac{3}{4} \log \left(\frac{T_2}{T_1} \right)} \end{aligned} \quad (9b)$$

¹⁴) P. Schulz, Ann. Physik (6) **1**, 318 (1947).

¹⁵) W. Göing, Z. Physik **131**, 603 (1952).

¹⁶) R. Rompe, W. Thouret, Z. techn. Physik **17**, 377 (1936).

R. Borchert gelangte zu einer anderen Formel, da er die mittlere freie Weglänge der Elektronen näherungsweise als konstant annahm und somit die bei konstantem Druck vorhandene Temperaturabhängigkeit der mittleren freien Weglänge ($\lambda \approx \frac{1}{n_0 Q} \approx \frac{kT}{pQ}$) vernachlässigte:

$$\frac{U_a}{U_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log\left(\frac{S_{L2}}{S_{L1}}\right) + \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}{\log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) - \left(\frac{1}{4} \log\frac{T_2}{T_1}\right)} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{\log\left(\frac{S_{L2}}{S_{L1}}\right) + \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}{\log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)} = \frac{U_a}{U_i} \text{ (Borchert).} \quad (9c)$$

a) Der Druck im Bogengefäß nach Umschalten der Stromstärke

x) Der Druck in einer kugelförmigen Edelgashöchstdrucklampe

Nach Messungen von E. Palm¹⁷⁾ an kugelförmigen Edelgashöchstdrucklampen bei verschiedenen Stromstärken hängt im stationären Zustand der Druck in der Lampe von der Bogenleistung L und der reduzierten Oberfläche O_r gemäß

$$\frac{p_{\text{stat}}}{p_0} = 1 + 0,76 \cdot \left(\frac{L}{O_r}\right) 0,38 \quad (10)$$

ab, wobei

$$O_r = \frac{O \cdot \lambda \cdot \kappa}{w}$$

Hierbei sind die Bogenleistung L in Watt, O = Oberfläche der Lampe in cm^2 , λ = Wärmeleitfähigkeit der Wandung relativ zur Wärmeleitfähigkeit von Quarz, w = Wandstärke in mm, κ = Wärmeleitfähigkeit des Füllgases relativ zur Wärmeleitfähigkeit von Xenon, anzugeben. Die Druckdifferenz zwischen 2 stationären Zuständen werde als Δp_{stat} bezeichnet.

Wird der Strom sprunghaft von einem kleineren Wert auf einen größeren Wert geschaltet, so steigt der Druck zuerst schnell an, die Druckdifferenz erreicht nach einer Zeit der Größenordnung 1 Sekunde den Wert $\Delta p \approx \frac{1}{3} \Delta p_{\text{stat}}$ (s. Abb. 1), danach erfolgt eine langsame Druckerhöhung, und nach einer Zeit von etwa 2 Minuten beträgt die Druckerhöhung $\Delta p = \Delta p_{\text{stat}}$ und vergrößert sich praktisch nicht mehr.

Die Zeitkonstante von größenordnungsmäßig 1 Sekunde ergibt sich dadurch, daß sich die Temperatur infolge der endlichen Wärmekapazität des Ballastgases in endlicher Zeit auf einen Zwischenzustand einstellt. Der Zeitkonstanten von etwa 2 Minuten entspricht eine langsamere Änderung der Temperaturverteilung innerhalb der Quarzwandung auf einen entsprechend der Bogenleistung veränderten stationären Wert.

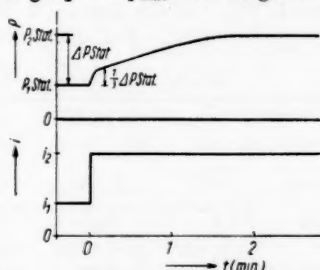


Abb. 1. Zeitlicher Druckverlauf in einer Edelgashöchstdrucklampe nach Umschalten der Stromstärke. Schematisch nach E. Palm¹⁷⁾

¹⁷⁾ E. Palm, Ann. Physik (6) 18, 17 (1956).

β) Der Druck in einer kugelförmigen Quecksilberhöchstdrucklampe

Die Gültigkeit von Gl. (10) ist nur dann gewährleistet, wenn in der Lampe keine flüssige Phase des Füllmediums vorhanden ist. Sonst wird der Druck ausschließlich von der kleinsten Wandinnentemperatur gemäß der Dampfdruckkurve bestimmt. Für Quecksilber bei einem Druck von 35 at entsprechend dem Druck in der HBO 500 bei normalem Betriebszustand ergibt sich eine Sättigungstemperatur von 650° C.

Obwohl H. Burck mittels Röntgenstrahl-Absorptionsmessungen nach dem Abschalten der Lampe vom Typ HBO 500¹⁸⁾ und B. Jäkel-Hartenstein mittels Strom-Spannungsmessungen beim Einbrennen einer Lampe des gleichen Typs¹⁹⁾ zeigen konnten, daß bei normaler Lampenleistung alles Quecksilber verdampft war, kann das Auftreten einer Kondensation in der bei den Borchertschen Messungen benutzten Lampe nicht mit Sicherheit verneint werden.

Tritt Kondensation ein, ändert sich der Druck mit der kleinsten Wandinnentemperatur mit einer Zeitkonstanten, die in der Größenordnung von 1 Minute liegt. Die Druckänderung während der Zeit von einigen Sekunden nach Umschalten der Bogenstromstärke ist dann vernachlässigbar klein und geht nicht in die Auswertung mit ein.

Ist dagegen keine Kondensation vorhanden, so muß, da die Messungen während einer Zeit erfolgten, die von der Größenordnung der Zeit ist, mit der sich der Druck schnell von $\Delta p = 0$ bis $\Delta p \approx \frac{1}{3} \Delta p_{\text{stat}}$ ändert, angenommen werden, daß die für die Messung maßgebliche Druckänderung alle Werte zwischen $\Delta p = 0$ und $\Delta p = \frac{1}{3} \Delta p_{\text{stat}}$ annehmen kann.

b) Neuberechnung der effektiven Ionisierungsspannung nach den Messungen von R. Borchert

Die effektive Ionisierungsspannung wurde nach den Messungen von R. Borchert sowie nach den Gln. (7–9) neu berechnet, a) unter der Annahme konstanten Drucks ($\Delta p = 0$), b) unter der Annahme $\Delta p = \frac{1}{3} \Delta p_{\text{stat}}$. Die Ergebnisse sind in Tab. 1, Spalte 10 und Spalte 12, eingetragen. Daneben enthält Tab. 1 in den Spalten 1–9 Angaben über Bogendaten unter normaler Betriebsbedingung und den für die Auswertung maßgeblichen Extrembe-

Tabelle 1. Bogendaten und effektive Ionisierungsspannungen

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Lampe	i (A)	T (°K)	σ (cm ⁻¹)	p (at) $\left(\Delta p = \frac{1}{3} \Delta p_{\text{stat}}\right)$	x (%)	n_e (cm ⁻³)
HBO 500	6,5	7660	1,7	35	0,81	$2,87 \cdot 10^{17}$
	3,5–8,0	7204–7800	1,05–1,95	33–86	0,49–0,94	
HBO 200	4,0	8000	3,35	60	1,43	$(8,85 \cdot 10^{17})$
	2–5	7480–8126	2,0–3,8	56,0–61,6	0,82–1,64	

¹⁸⁾ H. Burck, Exp. Techn. Physik 5, 33 (1957).

¹⁹⁾ B. Jäkel-Hartenstein, unveröffentlicht.

Tabelle 1 (Fortsetzung)

Lampe	(8) Leistungs- dichte ($\text{kW} \cdot \text{cm}^{-2}$)	(9) $R(10^{-2} \text{cm})$	(10) $U_{\text{eff}} \text{ (V)}$ ($\Delta p = 0$)	(11) $U_{\text{eff}} \text{ (V)}$ (n. Borchert)	(12) $U_{\text{eff}} \text{ (V)}$ ($\Delta p = \frac{1}{3} \Delta p_{\text{stat}}$)
HBO 500	35,5 17,5—44,5	9,2 9,1—9,3	9,08	10,15	10,59
HBO 200	119 59,5—150	4,5 4,3—4,6	8,93	10,08	10,70

Lampe	(13) $U_{\text{eff}} \text{ (V)}$ (Unsöld)	(14) Z_{eff}^{\dagger}	(15) $U_{\text{eff}} \text{ (V)}$ [n. Gl. (2a)]	(16) $U_{\text{ideal}} \text{ (V)}$
HBO 500	9,78	1,4	10,20	10,43
HBO 200	(9,42)	1,5	10,04	

dingungen. Dabei wurde bei den Daten für p in Spalte 5 $\Delta p = \frac{1}{3} \Delta p_{\text{stat}}$ vorausgesetzt.

Für n_e (HBO 500) (Spalte 7) wurde der von R. Rompe und P. Schulz (s. P. Schulz¹⁴) direkt gemessene Wert genommen, dagegen wurde der Wert n_e (HBO 200) = $8,85 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ auf dem Umweg über den Ionisationsgrad α (HBO 200) erhalten, welcher aus α (HBO 500) und dem Verhältnis der Leitfähigkeiten $\sigma(\text{HBO 200}) : \sigma(\text{HBO 500})$ gemäß Gl. (5) berechnet wurde. Nach der Saha-Gleichung und den Angaben aus ¹¹) dürfte die Elektronendichte dagegen nur $n_e = 4,5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ betragen.

Wegen ihrer Unsicherheit sind entsprechende Werte eingeklammert.

Als Beispiel für die Auswertung ist in Abb. 2 $B(T)$ als Funktion von $2A(T)$ entsprechend den Gln. (7 u. 8) und der Annahme $\Delta p = \frac{1}{3} \Delta p_{\text{stat}}$ für die Lampe vom Typ HBO 500 und für die Spektrallinie $\lambda = 11287 \text{ \AA}$ aufgetragen. Aus der Neigung der Geraden und der Anregungsspannung der Linie von 8,8 V ergibt sich die effektive Ionisierungsspannung hieraus zu 10,52 V. Dieser Wert ist natürlich zu groß.

Spalte 11 enthält die Mittelwerte der von R. Borchert angegebenen effektiven Ionisierungsspannungen. In Spalte 13 sind zum Vergleich die aus den Elektronenkonzentrationen nach der Unsöld-Formel Gl. (1) sich ergebenden Ionisierungsspannungen angegeben, Spalte 14 enthält in Gl. (1) eingehende mittlere Werte

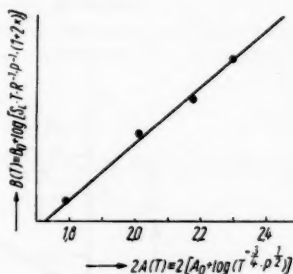


Abb. 2. $B(T)$ als Funktion von $2 \cdot A(T)$ für die Spektrallinie der Wellenlänge $\lambda = 11287 \text{ \AA}$ und für die Lampe vom Typ HBO 500. Angenommene Druckänderung:

$\Delta p = \frac{1}{3} \Delta p_{\text{stat}}$. Aus der Neigung der Geraden $\frac{dB(T)}{d[2A(T)]} = \frac{U_a}{U_i}$ ergibt sich mit $U_a = 8,8 \text{ V}$ die effektive Ionisierungsspannung zu $U_i = 10,52 \text{ V}$

für Z^3 , in Spalte 15 sind die entsprechend Gl. (2a) sich ergebenden effektiven Ionisierungsspannungen unter der Annahme, daß ihre Herabsetzung allein durch Polarisation erfolgt, eingetragen, und Spalte 16 enthält die ideale Ionisierungsspannung.

In Abb. 3 und 4 sind die effektiven Ionisierungsspannungen für die Lampen vom Typ HBO 500 und HBO 200 als Funktion einer angenommenen Druckänderung von $\frac{\Delta p}{\Delta p_{\text{stat}}}$ eingetragen.

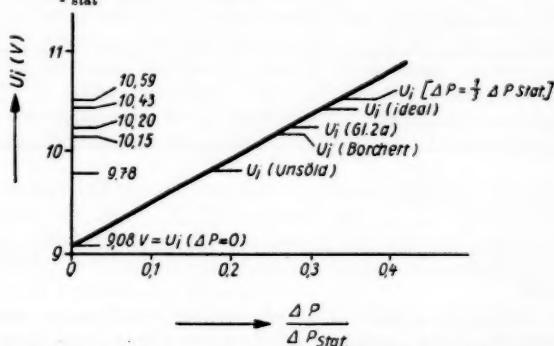


Abb. 3. Effektive Ionisierungsspannung U_i als Funktion einer angenommenen Druckänderung $\frac{\Delta p}{\Delta p_{\text{stat}}}$ für die Lampe vom Typ HBO 500

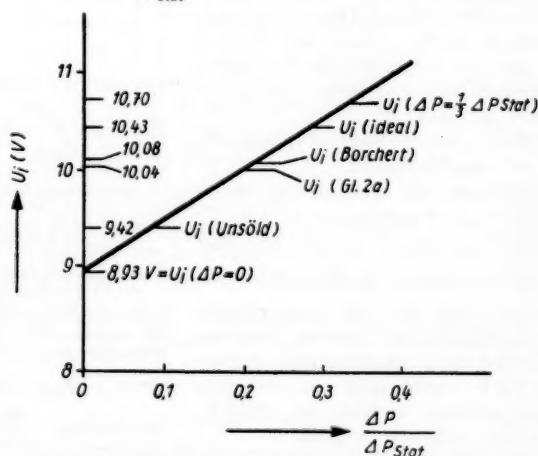


Abb. 4. Effektive Ionisierungsspannung U_i als Funktion einer angenommenen Druckänderung $\frac{\Delta p}{\Delta p_{\text{stat}}}$ für die Lampe vom Typ HBO 200

Weiterhin sind in diesen Abbildungen die Werte entsprechend den Spalten 11, 13, 15, 16 von Tab. 1 eingetragen. Den Borchertschen Angaben ent-

spricht eine Druckänderung von $\Delta p \approx 0,23 \Delta p_{\text{stat}}$, den nach H. Unsöld berechneten Werten eine Druckänderung von $\Delta p \approx 0,12 \Delta p_{\text{stat}}$.

Nimmt man eine Druckänderung von $0,12 \Delta p_{\text{stat}}$ als möglich an, so erhält man bei einem normalen Betriebsdruck von 35 at einen den Messungen entsprechenden kleinsten und größten Druck von 34,3 bzw. 35,6 at. Eine Druckänderung von unter einer Atmosphäre bei einem Druck von 35 at ist aber äußerst schwierig festzustellen, und es ist daher auch nicht verwunderlich, daß eine solche von Borchert nicht bemerkt wurde.

Abschließend ist zu bemerken, daß wegen der unsicheren Kenntnis der Größe der Druckänderung nach dem Umschalten der Stromstärke auf Grund der Borchertschen Messungen nur ausgesagt werden kann, daß die effektive Ionisierungsspannung bei den entsprechenden Versuchsbedingungen größer als 9 V war.

3. Bestimmung der effektiven Ionisierungsspannung nach R. Rompe, P. Schulz und W. Thouret²⁰⁾

R. Rompe, P. Schulz und W. Thouret untersuchten die kontinuierliche Ausstrahlung eines elektrodenstabilisierten Quecksilberhochdruckbogens in einer Lampe vom Typ HBO 500. Sie erhielten in einem Stromstärkebereich von 4–12 A und für Quecksilberfüllungen von $0,5\text{--}1,5 \cdot 10^{20}$ Atome/cm³ die Beziehung

$$S_v = C(p) \cdot I^{\frac{2}{3}} \quad (11)$$

(I = Stromstärke). Unter der Annahme, daß zum Kontinuum nur Elektronenbrems- und -rekombinationsstrahlung beitragen, ergibt sich die Beziehung:

$$S_v = \text{konst. } p \cdot \exp\left(-\frac{e V_i}{k T}\right). \quad (12)$$

Nun wird wegen der großen Leistungsdichte im Bogen für die Gesamtstrahlung

$$S = (L - A) \approx \text{konst. } L$$

angenommen, ferner mit $L = I \cdot G$

$$S \sim I \cdot G = \text{konst.} \exp\left(-\frac{e V_m}{k T}\right). \quad (13)$$

Dabei ist V_m eine mittlere Anregungsspannung für die Gesamtstrahlung. Sie wurde für den Druckbereich $p \approx 1$ at von W. Elenbaas²⁰⁾ zu 7,8 V bestimmt. (Für diesen Druckbereich und bei den von Elenbaas untersuchten Bögen mit geringer Leistungsdichte ist das Verhältnis von Kontinuumstrahlung zur Linienstrahlung geringer als bei den hier untersuchten Bögen, so daß sich für V_m ein größerer Wert ergeben müßte.) Aus Gl. (13) ergibt sich:

$$T = \frac{e V_m}{k (\text{konst.} \ln I \cdot G)}.$$

²⁰⁾ W. Elenbaas, *Physica* **2**, 757 (1935).

Wird dieser Ausdruck in (12) unter Berücksichtigung, daß nach dem Kanalmodell²¹⁾

$$G = \text{konst.} \cdot I^{\frac{2V_m - V_i}{2V_m + V_i}}$$

ist, eingesetzt, so ergibt sich:

$$S_p \sim I^{\frac{-4V_i}{2V_m + V_i}}. \quad (14)$$

Um Gl. (14) der experimentell gefundenen Beziehung Gl. (11) anzupassen, wird mit $V_m = 7,8$ V für die effektive Ionisierungsspannung V_i der Wert 9,5 V erhalten.

Nimmt man jedoch an, daß entsprechend einem größeren Anteil des Kontinuums zur Gesamtstrahlung V_m größer als 7,8 V ist, so erhält man für V_i ebenfalls einen größeren Wert, der um wenige zehntel Volt oberhalb 9,5 V liegen dürfte.

4. Bestimmung der effektiven Ionisierungsspannung nach W. Elenbaas⁷⁾

Während bei den unter 2. und 3. beschriebenen Arbeiten elektrodenstabilisierte Hg-Hochdruckbögen großer Leistungsdichte untersucht wurden, verwendete Elenbaas für seine Untersuchungen wandstabilisierte Hg-Hochdruckbögen verhältnismäßig kleiner Leistungsdichte.

Für Bögen bei einem Druck der Größenordnung 1 at erhielt W. Elenbaas für den Gradienten G (V/cm) die experimentell gefundene Beziehung:

$$G \sim \frac{L^{\frac{1}{2}}}{(L - A)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{m^{\frac{7}{12}}}{d^{\frac{2}{3}}}. \quad (15)$$

Hierbei sind: G = Gradient in V/cm, L = Leistung pro Längeneinheit in W/cm, m = verdampfte Hg-menge in mg/cm, d = Durchmesser des Entladungsröhrs in mm.

Gl. (15) ergibt sich auch aus der Beziehung für die Leistung pro cm:

$$L = I \cdot G \sim G^2 p^{-\frac{1}{2}} T^{\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{e(V_{i0} - \Delta V_i)}{2kT}\right), \quad (16)$$

wenn Potenzen von T vernachlässigt werden, wenn für die Gesamtstrahlung pro cm Bogenlänge

$$S = L - A \sim m \cdot \exp\left(-\frac{eV_m}{kT}\right) \quad (17)$$

angenommen wird, $\Delta V_i = 0$ gesetzt und für V_m der Wert 7,8 V genommen wird.

Bei Drücken oberhalb einer Atmosphäre (für p gilt: $p = 130 \frac{m}{d^2}$) ist der Wert für den gemessenen Gradienten größer als der aus Gl. (15) sich ergebende Wert, um einen Faktor, der mit zunehmendem Druck dem Grenzwert 1,5 zustrebt.

²¹⁾ R. Rompe u. W. Thouret, Z. techn. Physik 19, 352 (1938).

Um Rechnung und Experiment in Übereinstimmung zu bringen, wird für die Strahlung S eine gegenüber Gl. (16) veränderte Beziehung angenommen. Unter Vernachlässigung der Potenzen von T ergibt sich nach Elenbaas für S als Summe von Linienstrahlung, Elektronenkontinuum und Quasimolekülkontinuum:

$$S = L - A = C'_1 \delta^2 p \cdot \exp\left(-\frac{e V_e}{k T}\right) + C'_r \delta^2 p \cdot \exp\left(-\frac{e (V_{10} - \Delta V_i)}{k T}\right) + C'_m \delta^2 p^2 \exp\left(-\frac{e V_m}{k T}\right) \quad (18)$$

δ ist der idealisierte Kanaldurchmesser. Wird p durch $\frac{m}{d^2}$ ersetzt und $\delta \sim d$ angenommen, wird ferner Gl. (18) nach W. Elenbaas in der Form

$$S = L - A \sim m \left(3 + 1 + 100 \frac{m}{d^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{e V_m}{k T}\right) \quad (19)$$

vereinfacht, so ergibt sich für den Gradienten mit $V_m = 7,8$ V:

$$G \sim \frac{L^{\frac{1}{2}}}{(L - A)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{m^{\frac{7}{12}} \left(1 + 25 \frac{m}{d^2}\right)^{\frac{1}{3}}}{d^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{e \Delta V_i}{4 k T}\right). \quad (20)$$

Wird $\Delta V_i = 0$ gesetzt, weicht jetzt der gemessene Wert für den Gradienten von dem nach Gl. (20) berechneten Wert um einen Faktor ab, der nur vom Druck bzw. von $\frac{m}{d^2}$ abhängt und für 90 at ungefähr 1:1,5 beträgt. Um Experiment und Rechnung in Übereinstimmung zu bringen, nimmt Elenbaas eine Erniedrigung der Ionisierungsspannung an, die mit zunehmendem Druck größer wird und für $p = 90$ at den Wert $\Delta V = 1,09$ V annimmt.

Um diesen Wert mit dem aus der Unsöld'schen Theorie Gl. (1) sich ergebenden Wert vergleichen zu können, muß die Elektronendichte bekannt sein. Sie läßt sich nach den Angaben von Elenbaas für $d = 6$ mm, einer Hg-Füllmenge von $m = 25$ mg/cm, einem Druck von 90 at, einer Leistung pro Bogenlänge von 60 W/cm, mit $G = 190$ V/cm, $I = 0,3$ A, $j = 4,3$ A/cm² (dabei ist ein effektiver Bogenquerschnitt von 0,25 mal dem inneren Rohrquerschnitt angenommen), mittels der Beziehung für die Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{j}{G} = \frac{e^2 \cdot x}{Q \sqrt{3 k T m_e}}$$

berechnen. Setzt man für Q den Wert $1,2 \cdot 10^{-14}$ cm² ein und nimmt näherungsweise $T = 6000^\circ$ K an, ergibt sich für den Ionisationsgrad $x = 0,5 \cdot 10^{-4}$ und für die Elektronendichte $n_e = 5,5 \cdot 10^{15}$.

Für diese geringe Elektronendichte hat man aber entsprechend der Unsöld'schen Theorie (Gl. (1) mit $Z = 1$) eine Erniedrigung der Ionisierungsspannung von nur 0,12 V zu erwarten.

Eine Erniedrigung bis zu 1,09 V aber, wie sie Elenbaas haben muß, damit seine für die Errechnung des Gradienten benutzten Ansätze und Voraussetzungen, z. B. die, daß zum Kontinuum zum großen Teil Quasimolekülstrahlung beiträgt, die experimentellen Ergebnisse befriedigen, steht in vollem Widerspruch zu allen neueren theoretischen Annahmen, daß die Ernied-

rigung der Ionisierungsspannung in erster Linie nur von der Ladungsträgerdichte, nicht aber von der Neutralgasdichte und damit vom Druck unmittelbar abhängt.

Das Ergebnis steht auch in vollem Widerspruch zu der Tatsache, daß in einem elektrodenstabilisierten Hg-Hochdruckbogen bei $p = 60$ at eine Spektrallinie gefunden wurde, deren Anregungsspannung nur 0,3 V unterhalb der idealen Ionisierungsspannung liegt¹¹⁾.

Die Elenbaasschen Arbeiten können daher keinen Aufschluß über die wirkliche Herabsetzung der Ionisierungsspannung geben.

5. Bestimmung der effektiven Ionisierungsspannung nach R. Rompe, W. Weizel und P. Schulz⁹⁾]

R. Rompe, W. Weizel und P. Schulz beobachteten bei einem elektrodenstabilisierten Hg-Hochdruckbogen in einer Lampe von Typ HBO 500, daß mit zunehmender Stromstärke Spektrallinien mit hohen Ausgangstermen verschwanden.

Bei einem Druck von $p = 35$ at und einer Elektronendichte von etwa $2,9 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ beobachteten sie als letzte Linie der Serie $6^3P_2 - n^3S_1$ mit höchstem Ausgangsterm die Spektrallinie 2925 Å mit einer Anregungsspannung von 9,6 V. Daraus schlossen sie, daß die effektive Ionisierungsspannung etwa 9,7 V betrug. (Die genauere Anregungsspannung der Linie beträgt 9,67 V, so daß sich der Wert für die effektive Ionisierungsspannung auf etwa 9,8 V erhöht. Dieser Wert stimmt mit dem nach H. Unsöld berechneten Wert, s. Tab. 1, Spalte 13 oben, gut überein.)

Nun ergeben sich bei der Anwendung der Methode folgende Fehlermöglichkeiten:

1. Es können noch mehr Spektrallinien mit höheren Ausgangsniveaus vorhanden sein, die nur infolge ihrer geringen Intensität nicht mehr beobachtet werden.

2. Auf den Spektrographenspalt gelangt nicht nur Strahlung aus dem Bogenzentrum, sondern auch aus den Randgebieten des Bogens. Da der Bogenrand eine geringere Ladungsträgerdichte als das Bogenzentrum hat, können noch Linien mit relativ hohem Anregungsniveau beobachtet werden.

Die Fehlermöglichkeit 1. kann bei den vorliegenden Arbeiten ausgeschlossen werden, da es sich bei den entsprechenden Spektrallinien um solche handelt, die bei geringer Stromstärke nachweislich vorhanden waren und erst bei Steigerung der Stromstärke verschwanden.

Die Fehlermöglichkeit 2. kann nicht ganz ausgeschlossen werden und macht sich dann unangenehm bemerkbar, wenn mit einem Spektralapparat von sehr großem Auflösungsvermögen gearbeitet wird, bei dem noch sehr schwache Spektrallinien bemerkbar sind, die mit einem Spektralapparat von geringerem Auflösungsvermögen längst nicht mehr wiedergegeben werden können.

Da die beobachtete Linie von 2925 Å eine merkliche Intensität besaß, kann angenommen werden, daß Fehlermöglichkeit 2. höchstens in geringem Maße auftrat.

Werden die Registrierkurven für das Spektrum des Quecksilberhochdruckbogens in der Lampe vom Typ HBO 200 von W. Göing, H. Meier und H. Meinen¹¹⁾ in gleicher Weise ausgewertet, wobei nur Linien merklicher

Intensität in Betracht gezogen werden, so wird für die effektive Ionisierungsspannung ein Wert von ungefähr 9,8 V erhalten. Die Übereinstimmung mit dem von der Unsöld'schen Theorie geforderten Wert (9,6 V) ist, wenn die aus der Saha-Gleichung und den Angaben aus ¹¹⁾ folgende Elektronendichte von $n_e = 4,5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ zugrunde gelegt wird, mäßig.

Abschließend ist zu sagen, daß sich in Zusammenfassung der Ergebnisse aus Abschnitt 3 und 5 als wahrscheinlicher Wert für die effektive Ionisierungsspannung bei einer Elektronendichte von $n_e = 3 - 4 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ ein Wert von $V_{\text{eff}} \approx 9,8 \text{ V}$ ergibt.

Die Arbeit entstand auf Anregung von Herrn Prof. Dr. R. Rompe. Ihm danke ich für klärende Diskussionen.

Berlin, Institut für Strahlungsquellen der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 28. März 1958.

Lebensdauermessungen an Photoelektronen in CdS-Kristallen mit einer Kerrzellen-Apparatur¹⁾

Von R. Caspary

Mit 7 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Es wird eine Kerrzellen-Apparatur beschrieben, mit der rechteckförmig moduliertes Licht zur Aufnahme von An- und Abklingkurven des Photostroms in Photohalbleitern erzeugt wird.

Die Frequenz der Belichtung ist kontinuierlich regelbar zwischen 50 Hz und 200 kHz. Außerdem ist die Symmetrie der Belichtungsform veränderlich. Die Zeitdauer des Lichtschaltvorgangs beträgt $4 \cdot 10^{-7}$ sec, unabhängig von der eingestellten Frequenz. Die Möglichkeiten und Grenzen der Apparatur werden kurz aufgezeigt.

Die Messungen an CdS-Kristallen ergaben, daß beim An- und Abklingen zwischen zwei Prozessen zu unterscheiden ist: Einem kurzzeitigen Prozeß, der in einigen 10^{-6} sec abläuft und einem trägen Vorgang, der sich über einige 10^{-3} sec erstreckt.

Zusätzliche Messungen, die die Brauchbarkeit der Apparatur auch für andere Photoleiter zeigen sollten, ergaben für die Lebensdauer der Photoelektronen in einer PbS-Schicht eine Zeit von $3 \cdot 10^{-6}$ sec.

1. Einleitung

In zahlreichen Arbeiten der letzten Jahre über den Leitungsmechanismus in photoelektrischen Substanzen ist das Cadmiumsulfid besonders eingehend untersucht worden.

Im Vordergrund der experimentellen Untersuchungen standen Messungen des Halleffekts, der lichtelektrischen Leitfähigkeit, optischer Konstanten und anderer Kristalleigenschaften in Abhängigkeit von der eingestrahlten Lichtintensität, der Temperatur, dem Störstellengehalt und anderer Parameter.

In einem gewissen Gegensatz zu diesen Methoden, die auf der Messung zeitlich stationärer Elektronenkonzentrationen beruhen, stehen die Untersuchungen über die Reaktionskinetik der Ladungsträger zwischen den im Kristall möglichen Energiezuständen. Experimente dieser Art haben letztlich das Ziel, Aussagen über die Lage und Anzahl solcher Energiezustände im Kristall zu ermöglichen.

¹⁾ Auszug aus einer Dissertation, die bei der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität in Frankfurt a. M. eingereicht wurde.

Prinzipiell wird man bei einer Untersuchung der letztgenannten Art im Kristall eine Störung einer bestimmten Termbesetzung hervorrufen und die Einstellung des neuen Gleichgewichtszustandes zeitlich verfolgen.

Im Fall des relativ lichtempfindlichen Cadmiumsulfids liegt es nahe, eine solche Störung des Gleichgewichtszustands der Termbesetzung durch eine plötzliche Änderung der pro Zeit- und Volumeneinheit durch Lichteinstrahlung erzeugten Elektron-Lochpaare vorzunehmen.

Experimentell verwirklicht man eine solche Störung durch eine sogenannte „Rechteckbelichtung“, die man z. B. durch periodische Unterbrechung eines auf den Kristall fallenden Lichtstroms erreichen kann.

Die Einstellung der zwei Gleichgewichtszustände (Dunkel- und Hellperiode) wird im allgemeinen über eine Messung des Photostroms verfolgt (Bestimmung des „An- und Abklingens“). Unter bestimmten Voraussetzungen kann man hieraus zunächst auf die zeitliche Abhängigkeit der Elektronenkonzentration im Leitungsband schließen. Danach wird man versuchen, ein physikalisch sinnvolles Modell zu finden, das die gemessene Abhängigkeit unter Berücksichtigung bereits bekannter Ergebnisse der Halbleiterphysik wiedergibt.

Im Gegensatz zu Messungen der besprochenen Art, die von Fassbender und Seraphin²⁾ unternommen wurden, wurde bei den Untersuchungen der vorliegenden Arbeit besonderer Wert auf die Aufklärung relativ kurzzeitiger Prozesse gelegt, die in Zeiten $< 10^{-5}$ sec nach dem Ein- und Ausschalten der Belichtung stattfinden. Über die Natur solcher Prozesse war bisher nichts bekannt, da die Erzeugung der für solche Untersuchungen notwendigen sehr schnellen Lichtwechsel auf Schwierigkeiten stößt.

2. Apparat

Das Prinzip der Apparatur ist aus der Abb. 1 zu ersehen. Zunächst werden in einem Generator *G* Rechteckspannungen variabler Frequenz und hoher

Flankensteilheit mit einer Amplitude von 10 Volt erzeugt, die in einer folgenden Treiberstufe *T* und einer Leistungsstufe *L* weiter verstärkt werden. Die am Ausgang der Leistungsstufe resultierende Rechteckspannung der Größenordnung 1 kV und einer Flankenanstiegszeit von einigen 10^{-7} sec wird nun zur Modulation eines die Kerrzelle *K* durchsetzenden Lichtstroms verwandt, der auf die CdS-Kristallzelle trifft. Die am Arbeitswiderstand des Kristalls auftretenden Spannungsänderungen werden über eine Kathodenverstärkerstufe *Ka* einem Breitbandverstärker *V* zugeleitet. An den Ausgang dieses Verstärkers ist ein Breitbandoszillograph *O* angeschlossen. Die

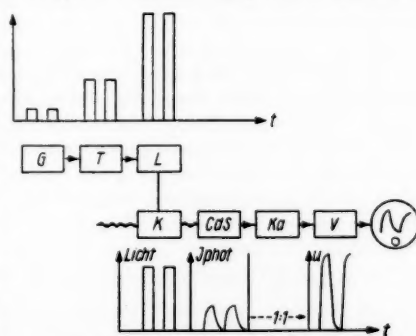


Abb. 1. Blockschema der Apparatur

²⁾ J. Fassbender u. B. Seraphin, Ann. Physik **10**, 374 (1952).

auf dem Oszillographenschirm aufgezeichneten An- und Abklingkurven werden mit einer Kamera aufgenommen.

Im folgenden wird auf die Wirkungsweise der einzelnen Apparaturteile näher eingegangen.

Die Kerrzelle K , die im Strahlengang zwischen einem Polarisator P und einem Analysator A angeordnet ist, besteht aus einem kleinen Plattenkondensator, der mit Nitrobenzol gefüllt ist. Polarisator und Analysator sind gegeneinander um 90 Grad gedreht; außerdem bilden beide einen Winkel von 45 Grad gegen die Feldrichtung \mathcal{E} im Kerrkondensator (Abb. 2).

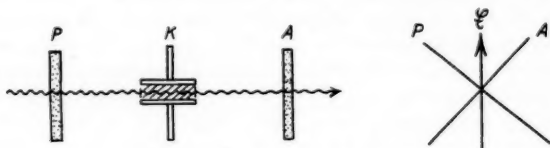


Abb. 2. Zur Kerrzellenoptik

Läßt man in eine solche Anordnung unpolarisiertes Licht einfallen, so gilt für die Lichtintensität hinter dem Analysator

$$I = I_0 \sin^2 \frac{\pi \cdot K \cdot l \cdot U^2}{9 \cdot 10^4 \cdot a^2} \quad (1)$$

Hierbei bedeutet:

I_0 die maximal zu erwartende Lichtintensität. Sie ist gleich dem Betrag der Intensität des Lichts, das in die Apparatur eintritt, vermindert um die Verluste, die durch Polarisation, Reflexion und Absorption an den einzelnen Teilen der Optik entstehen.

Weiterhin ist

l die Länge der durchstrahlten Flüssigkeitsschicht im Kerrkondensator, a der Plattenabstand des Kondensators,

U die an den Platten liegende elektrische Spannung und

K die Kerrkonstante des Nitrobenzols.

Bei der Verwendung der Kerrzelle als Lichtschalter strebt man im allgemeinen einen möglichst schnellen Wechsel zwischen maximaler Dunkelheit und maximaler Helligkeit an. Da der Kerr effekt eine sehr geringe Trägheit ($< 6 \cdot 10^{-9}$ sec) hat, ist z. B. eine Lichtschaltzeit von 10^{-7} sec immer dann zu erreichen, wenn es gelingt, die Spannung an der Kerrzelle in der geforderten Zeit von $U=0$ auf $U=U_{\max}$ zu ändern. Hierbei ist die Spannung U_{\max} durch das erste Maximum des Ausdrucks (1) gegeben. Für einen Kondensator mit den Dimensionen

Länge 1 cm, Breite 0,8 cm und Plattenabstand $8 \cdot 10^{-2}$ cm, wie er bei den Messungen benutzt wurde, liegt dieses Maximum bei einer Spannung von 2,7 kV. Aus apparativen Gründen wurde die Zelle jedoch nur auf 1,2 bis 1,5 kV ausgesteuert.

Bei der Konstruktion der Kerrzelle wurden wichtige Einzelheiten einer Arbeit von White³⁾ entnommen. Wesentlich war eine außerordentlich sorgfältige Reinigung des Nitrobenzols durch mehrfache Destillation.

³⁾ H. J. White, Rev. sci. Instrum. 6, 22 (1935).

Als Lichtquelle der optischen Anordnung diente eine Xenon-Hochdrucklampe (Typ XBO 162) mit hoher Leuchtdichte.

Die elektronische Apparatur mußte eine hohe periodische Rechteckspannung mit möglichst hoher Flankensteilheit erzeugen.

Dazu diente zunächst der

Generator G. Er besteht im wesentlichen aus einer Multivibratorschaltung, bei der die Schaltelemente so dimensioniert wurden, daß bereits hier die erforderliche hohe Flankensteilheit der Rechteckspannung erreicht wird. Die Frequenz ist kontinuierlich regelbar zwischen 50 Hz und 200 kHz. Die Symmetrie der Rechteckschwingung (das Verhältnis der Zeitdauern „Ein“/„Aus“) kann von 0,1 bis 10 verändert werden. In einigen weiteren Schaltstufen, bei denen die benutzten Pentoden großer Steilheit stark übersteuert werden, erfolgt nun die Begradigung der vom Multivibrator gelieferten rechteckähnlichen Spannungen.

In der folgenden

Treiberstufe *T* werden die so erzeugten Rechtecke bis zu einer Amplitude von etwa 100 Volt weiter verstärkt, um die folgende

Leistungsstufe *L* aussteuern zu können. Die Dimensionierung der Schaltelemente dieser Stufe ist für die Verwendung der Kerrzelle als Lichtschalter von entscheidender Bedeutung, da hier die erforderliche Höhe der Spannung unter Beibehaltung der hohen Flankensteilheit erzeugt werden soll. Wie man im folgenden sieht, bietet die Lösung des Problems einige apparative Schwierigkeiten. (Abb. 3.)

Die in *C* vereinigten Kapazitäten der Röhre, der Schaltung und der Kerrzelle betragen etwa 100 pF. Um diese Kapazität in der geforderten Zeit von etwa 10^{-7} sec aufzuladen, darf der Außenwiderstand der Röhre höchstens $1\text{ k}\Omega$ betragen. Bei einer Speisespannung von 1 kV bedeutet dies, daß die Röhre zur Erzielung einer Rechteckspannung von etwa 1 kV in der einen Halbperiode ($U = 0$) einen Anodenstrom von etwa 1 A zu liefern hat. In der anderen Halbperiode muß dagegen die Röhre praktisch stromlos sein, damit die Anodenspannung möglichst hoch (etwa 1 kV) wird.

Experimentell wurde die Schaltzelle durch eine Parallelschaltung von sechs Röhren des Typs LS 50 realisiert. Der Außenwiderstand der Röhrenanordnung, ein Hochleistungs-Kohleschichtwiderstand ($1 - 1,5\text{ k}\Omega$), hatte eine Belastbarkeit von 500 Watt.

Um eine optimale Flankensteilheit zu erreichen, waren sämtliche Anodenkreise mit *L*-Gliedern kompensiert, die in ihrer Größe gerade so bemessen waren, daß noch kein Überspringen erfolgte.

Sämtliche Teile dieser Apparatur mußten sorgfältig elektrisch abgeschirmt werden, um Einstreuungen in den Photozellenverstärker zu unterdrücken. Die relativ starke Wärmeentwicklung in der Leistungsstufe erforderte zudem eine Ventilator Kühlung.

Die Güte der Belichtung in bezug auf ihre Rechteckform — insbesondere die Flankensteilheit — wurde mit einer Vakuumphotozelle (Arbeitswiderstand $1\text{ k}\Omega$) in Verbindung mit einem breitbandigen Verstärker und einem

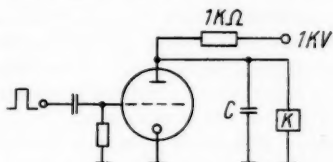


Abb. 3. Leistungsstufe (schematisch)

Oszillograph nachgeprüft. Ein elektronischer Schalter ermöglichte hierbei einen unmittelbaren Vergleich der an der Kerrzelle liegenden elektrischen Spannung mit der erzeugten Belichtungsform. Die Messungen ergaben, daß die Lichtschaltzeit — unabhängig von der eingestellten Frequenz — $4 \cdot 10^{-7}$ sec betrug.

Die CdS-Kristalle waren zusammen mit ihrem Arbeitswiderstand ($1 \text{ k}\Omega$) direkt an den Eingang einer Kathodenverstärkerstufe angeschlossen, von der die dem Photostrom proportionalen Spannungsänderungen zu einem Breitbandverstärker weitergeleitet wurden. An den Ausgang dieses Verstärkers war ein Breitbandoszillograph angeschlossen, auf dessen Schirm die An- und Abklingkurven bei sogenannter Triggerablenkung photographisch registriert wurden. Die Trigger-Impulse wurden von der an der Kerrzelle liegenden Spannung bezogen. Die maximale Zeitauflösung, die am Oszillograph eingestellt werden konnte, betrug $2 \cdot 10^{-7}$ sec/cm.

Die CdS-Kristalle waren nach einem Verfahren gezüchtet, das in einer vorausgegangenen Arbeit (Caspary und Müser⁴⁾) kurz skizziert ist. Der Abstand der Elektroden, die aus aufgetragenen Indium bestanden, betrug etwa 1 mm.

3. Ergebnisse

In den Abb. 4, 5, 6 und 7 ist das gemessene An- und Abklingen des Photostroms wiedergegeben (Umzeichnungen der photographisch aufgenommenen Oszillographenkurven). Es wurde in dieser Form bei fast allen der insgesamt 14 untersuchten Kristalle gefunden.

Beim Anklingen erkennt man zunächst bei relativ niedriger Zeitauflösung einen anfänglich schnellen Anstieg des Photostroms, dem sich nach einigen

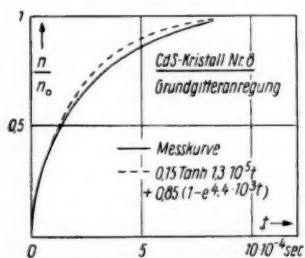


Abb. 4. Anklingen der Elektronenkonzentration (Beispiel)

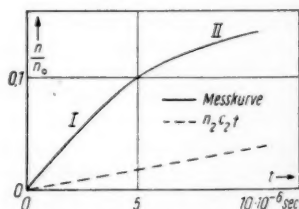


Abb. 5. Anfangsteil des in Abb. 4 dargestellten Anklingens in hoher Zeitauflösung

10^{-4} sec ein trägerer Teil anschließt. (Abb. 4.) Wählt man für den Anfangsteil eine etwa 100mal höhere Zeitauflösung, so findet man einen Kurvenverlauf, wie er in der Abb. 5 wiedergegeben ist. Hier erkennt man am Beginn des Anklingens einen zunächst gekrümmten Anfangsteil mit relativ hoher Anfangssteigung. Nach einigen 10^{-6} sec ist das Anwachsen des Photostroms jedoch bereits verlangsamt und geht in einen praktisch linearen Teil über. Analoge Verhältnisse wurden beim Abklingen gefunden. (Abb. 6 und 7.)

⁴⁾ R. Caspary u. H. Müser, Z. Physik. **134**, 101 (1952).

Es ist naheliegend, die charakteristische Form des Anklingens im Anfangsteil — den gekrümmten Teil I und den darauf folgenden linearen Anstieg II — als Überlagerung von zwei Prozessen zu deuten: 1. einem Vorgang, der im wesentlichen für den ersten Teil des Anklingens bestimmend ist; 2. einem Prozeß, der das Verhalten bei größeren Zeiten bestimmt.

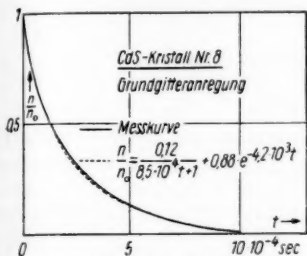


Abb. 6. Abklingen der Elektronenkonzentration

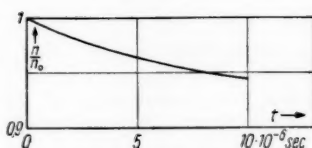


Abb. 7. Anfangsteil des in Abb. 6 dargestellten Abklingens in hoher Zeitauflösung

Unter der Annahme konstanter Beweglichkeit der Photoelektronen im Kristall wird man also zur Beschreibung des Anklingens der Elektronenkonzentration zunächst eine Funktion der Art

$$\frac{n}{n_0} = n_1 f_1(t) + n_2 f_2(t) \quad (2)$$

mit den folgenden Eigenschaften ansetzen:

$$f_1 = 0 \text{ für } t = 0, f_1 = 1 \text{ für } t > 10^{-5} \text{ sec},$$

$$f_2 = 0 \text{ für } t = 0, f_2 = 1 \text{ für } t > 10^{-3} \text{ sec und}$$

$$f_2 = c_2 t \text{ für } 0 < t < 10^{-5} \text{ sec.}$$

Außerdem muß noch

$$n_1 + n_2 = 1$$

gelten.

Man kann nun versuchen, zunächst die Funktion f_1 mit aus der Theorie folgenden Anklingfunktionen zu vergleichen. Dazu bildet man im Bereich der kleinen Zeiten den Ausdruck

$$\frac{n}{n_0} - c_2 n_2 t = n_1 f_1(t), \quad (3)$$

wobei $\frac{n}{n_0}$ die gemessene Kurve und $c_2 \cdot t$ den Anfangsteil der Funktion f_2 bedeuten.

n_1 kann man aus der Beziehung

$$\frac{n}{n_0} - c_2 n_2 t = n_1 \quad (4)$$

entnehmen, die für die Zeit $10^{-5} < t < 10^{-3} \text{ sec}$ ($f_1 = 1$) gilt.

Zur mathematischen Darstellung des gemessenen Kurvenverlaufs waren von einigen untersuchten Funktionen, die vom Bändermodell her verständlich sind, folgende brauchbar:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \tanh a t, f_2 = 1 - e^{-bt} && \text{für das Anklingen,} \\ f_1 &= \frac{1}{ct + 1}, f_2 = e^{-dt} && \text{für das Abklingen.} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Die einzelnen Konstanten hatten hierbei die folgenden Werte:

$$a: 1,3 - 3,4 \cdot 10^5$$

$$b: 1,8 - 6,6 \cdot 10^3$$

$$c: 0,7 - 1,7 \cdot 10^5$$

$$d: 1,7 - 5,9 \cdot 10^3.$$

Die Werte der Konstanten n_1 lagen zwischen 0,1 und 0,3 (entsprechend n_2 zwischen 0,9 und 0,7).

Bei zwei der untersuchten Kristalle fehlte der kurzzeitige Prozeß innerhalb der Meßgenauigkeit.

Bei der Untersuchung des An- und Abklingens des Photostroms in einer PbS-Schicht wurden keine trägen Prozesse gefunden. Die Meßkurven konnten gut durch einen rein exponentiellen Verlauf dargestellt werden. Die Lebensdauer der Ladungsträger ergab sich hierbei zu

$$\tau = 3 \cdot 10^{-6} \text{ sec.}$$

Zur Deutung der Ergebnisse kann man unter den gemachten Voraussetzungen — konstante Beweglichkeit, Ortsunabhängigkeit der Feldstärke u. a. — das Bändermodell von Riehl und Schön⁵⁾ heranziehen. Das Differentialgleichungssystem, das aus dem allgemeinen Modell unter Berücksichtigung von Aktivator- und Haftstellen folgt, ist jedoch nicht exakt auflösbar und enthält überdies eine so große Zahl von Konstanten, daß eine vernünftige physikalische Interpretation der Meßkurven unter Benutzung des allgemeinen Modells unmöglich erscheint. Spezialfälle, deren Behandlung aus mathematischen oder physikalischen Gründen mehr Erfolg versprochen, sind in der Literatur in mehreren Arbeiten behandelt.

Zur Erklärung der Phänomene wurden auch die folgenden Mechanismen betrachtet:

$$\dot{n} = a - \alpha n; \dot{n} = a - \beta n^2; \dot{n} = a - \alpha n - \beta n^2. \quad (6)$$

Sie sind unter der Bezeichnung „Monomolekularer Prozeß“, „Bimolekularer Prozeß“ und „Gemischter Prozeß“ bekannt. Vom Bändermodell her sind diese Gleichungen, die als Näherungen eines allgemeineren Mechanismus der Art

$$\dot{n} = a - f(n) \quad (7)$$

⁵⁾ z. B. N. Riehl u. M. Schön, Z. Physik **114**, 682 (1939).

aufgefaßt werden können, nicht unmittelbar verständlich. Die Lösungen der drei Differentialgleichungen führen z. B. für das Anklingen auf folgende Funktionen:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \frac{n}{n_0} &\sim 1 - e^{-At} && \text{für den Monomolekularen Prozeß,} \\
 \frac{n}{n_0} &\sim \tanh Bt && \text{für den Bimolekularen Prozeß,} \quad (6') \\
 \frac{n}{n_0} &\sim \frac{1}{1 + \coth Ct} && \text{für den Gemischten Prozeß.}
 \end{aligned}$$

Die drei Funktionen zeichnen sich dadurch aus, daß ihr Anwachsen durch eine einzige Zeitkonstante bestimmt ist. Die stark unterschiedlichen und den Kurvenverlauf bestimmenden Zeitkonstanten der gefundenen An- und Abklingkurven sind mit den genannten drei Reaktionsmechanismen also nicht zu erklären.

Zum Verständnis der Meßkurven wird man ein Modell mit Haftstellen heranziehen müssen. Bezeichnet man in einem solchen Modell die durch einen Index ν unterschiedenen Haftstellen mit H_ν , deren Besetzungsdichten mit h_ν , die Anregungsdichte pro Zeiteinheit mit a , so gilt für die Elektronenkonzentration n folgende Differentialgleichung:

$$\dot{n} = a + \sum_\nu \alpha_\nu h_\nu - \sum_\nu \beta_\nu n (H_\nu - h_\nu) - \gamma n (n + \sum_\nu h_\nu). \quad (8)$$

Im unbelichteten Zustand seien die Haftstellen leer, d. h. alle $h_\nu = 0$ für $t = 0$. Solange noch nach dem Einschalten der Belichtung $n > \sum h_\nu$ und $H_\nu > h_\nu$ ist, wird aus (8):

$$\dot{n} = a - \beta n \sum H_\nu - \gamma n^2. \quad (9)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung führt — in Analogie zum „Gemischten Prozeß“ — auf eine hyperbolische Tangensfunktion. Im weiteren Verlauf des Anklingens sind die gemachten Voraussetzungen immer weniger erfüllt, da sich die Haftstellen langsam auffüllen und sich die Rekombinationen aus diesen Stellen in das Leitungsband zurück bemerkbar machen. Im allgemeinen wird man bei der Einstellung des stationären Zustandes eine Überlagerung mehrerer verschiedener Einfangprozesse zu berücksichtigen haben. Diese tragen Vorgänge sind in der Wiedergabe der Meßresultate als lineare Superposition zweier Funktionen in der Funktion $f_2 = 1 - e^{-bt}$ summarisch berücksichtigt. Die Abweichungen dieser Funktion von dem Verlauf der Meßkurven (von manchen Autoren als „Sättigungseffekt“ bezeichnet) sind wahrscheinlich auf die doch recht grobe Näherung für einen verwickelteren Anlagerungsprozeß zurückzuführen. Es steht außer Frage, daß zur Klärung der durch f_2 beschriebenen, relativ trägen Vorgänge noch weitere Untersuchungen notwendig sind. In dieser Arbeit sollte vor allem der durch f_1 beschriebene kurzzeitige Prozeß herausgeschält werden.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für fördernde Diskussionen danke ich Herrn Prof. Dr. H. A. Mäser. Herrn Prof. Dr. M. Czerny möchte ich an

dieser Stelle für die Bereitstellung von Institutsmitteln danken. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die Überlassung wertvoller experimenteller Hilfsmittel.

Frankfurt a. M., Physikalisches Institut der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 11. März 1958.

A
der T
flüsse
erfolg
grup
werd

D
gonn
serie
frühe
und
der I
I
steht
sich
stärk
die I
hat
unte
dure
zu s
He⁺

I
werd

Diss
a
a
a

Die Fowler-Linie 3203 des ionisierten Heliums im homogenen elektrischen Feld

Von W. Steubing und J. Hengevoß¹⁾

Mit 5 Abbildungen

Inhaltsübersicht

An der He^+3203 -Linie wird der lineare Starkeffekt ausgemessen und mit der Theorie verglichen. Die angewandte Dispersion reicht aus, um die Einflüsse der Feinstruktur erkennen zu können. Die Bestimmung der Feldstärke erfolgt indirekt durch Auswertung der Aufspaltungen an der Parheliumgruppe $2S - 7Q$. Innerhalb der Genauigkeit, mit der die Feldstärke bestimmt werden kann, stimmen theoretische und experimentelle Ergebnisse überein.

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung der von R. Günther²⁾ begonnenen Untersuchung des linearen Starkeffektes an den Linien der Fowlerserie des ionisierten Heliums. Diese Untersuchung unterscheidet sich von früheren Arbeiten durch Anwendung eines homogenen elektrischen Feldes und durch Benutzung eines Spektrographen mit großer Dispersion, so daß der Einfluß der Feinstruktur auf die Linienaufspaltung erkennbar ist.

Da die Ionenlinien des Heliums außerordentlich lichtschwach sind, besteht das experimentelle Kernproblem in einer optimalen Realisierung der sich letztlich gegenseitig ausschließenden Forderungen nach großer Lichtstärke und einem möglichst homogenen elektrischen Feld. Dazu ist am besten die Kanalstrahlröhre nach Steubing und Schaefer geeignet³⁾. Günther hat mit einer solchen das erste Glied der Fowlerserie, die He^+4686 -Linie, untersucht. Nachdem es uns im Rahmen einer anderen Arbeit⁴⁾ gelungen war, durch Verbesserung der Güntherschen Versuchsanordnung die Lichtstärke zu steigern, bot sich die Möglichkeit, auch die erheblich lichtschwächere He^+3203 -Linie, das zweite Glied der Fowlerserie, zu untersuchen.

Versuchsanordnung

Die Günthersche Versuchsanordnung konnte im Prinzip beibehalten werden. Einzelheiten der verwendeten Apparatur sind in unserer zitierten

¹⁾ J. Hengevoß „Neue Spektraluntersuchungen im homogenen elektrischen Feld“. Dissertation Hamburg 1957.

²⁾ W. Steubing u. R. Günther, Ann. Physik (6) **15**, 345 (1955).

³⁾ W. Steubing u. J. A. Schaefer, Ann. Physik (5) **25**, 97 (1936).

⁴⁾ W. Steubing u. J. Hengevoß, Z. Physik **151**, 20 (1958).

Arbeit⁴⁾ beschrieben. Hier seien nur noch einmal die wesentlichen Punkte aufgeführt.

Durch Verwendung von Tantal als Elektrodenmaterial und von Molybdän als Hohlkathodeneinsatz gelang es, die Lebensdauer der Röhre auf etwa 100 Stunden heraufzusetzen. Infolge veränderter Dimensionierung der Röhre konnte die Erhöhung des Betriebsdruckes ermöglicht werden. Dadurch wurde eine erhebliche Intensitätssteigerung erreicht.

Die Gasversorgung der Röhre erfolgte gleichfalls im strömenden Betrieb, doch wurde reines Helium verwandt, statt wie bei Günther eines Gemisches aus Helium und Sauerstoff. Die Regelung von Druck und Durchströmung erfolgte vollautomatisch, wie überhaupt die ganze Versuchsanordnung so konstruiert war, daß sie etliche Stunden wartungslos funktionierte. Das zuströmende Helium wurde vor Eintritt in die Röhre durch ein mit flüssigem Stickstoff gekühltes Filter von aktiver Kohle gereinigt.

Der Spektrograph war ein Steinheil GH, der mit Quarzoptik montiert war. Die Ausrüstung bestand aus einem 60°-Prisma von 75 mm Basislänge nebst zwei entsprechenden Halbprismen in Youngscher Montierung. Der Kollimator hatte eine Brennweite von 725 mm und das Kameraobjektiv eine solche von 1600 mm (bezogen auf die Wellenlänge 2600 Å). Das Öffnungsverhältnis war 1:12. Die Abbildung des Feldraumes der Röhre auf den Spektrographenspalt erfolgte mit einem Quarzkondensor im Verhältnis 1:1.

Als Photomaterial bewährte sich die Astro-Platte von Perutz. Zur Auswertung der Aufnahmen wurde ein Renningersches Registrier-Mikrophotometer benutzt.

Wegen der langen Belichtungszeiten und der großen Dispersion war die Einhaltung einer konstanten Raumtemperatur sehr wichtig. Die Regelung geschah durch eine elektrische Raumheizung, die von einem Kontaktthermometer gesteuert wurde. Durch Wahl einer zur Umgebung relativ hohen Regeltemperatur einerseits und durch kräftiges Heizen andererseits wurde erreicht, daß die unvermeidlichen Temperaturschwankungen im Raum von $\pm \frac{2}{13}^{\circ}\text{C}$, die durch die Empfindlichkeit des Kontaktthermometers bedingt waren, eine kleine Periode hatten. Wegen dieser kurzen Periode schwankte die Temperatur im Prismenkasten des Spektrographen dann nur noch um etwa $\pm 0,05^{\circ}\text{C}$. Bei Berücksichtigung der Wärmeträgheit der Prismen war damit eine befriedigende Temperaturkonstanz erzielt.

Durchführung der Aufnahmen

Bei Inbetriebnahme mußte die Röhre zunächst saubergebrannt werden. Erst nach einer Einbrenndauer von 24 Stunden hatten sich die endgültigen Betriebsdaten eingestellt:

Brennspannung	190 V
Entladestromstärke	145 mA.

Bei einer Feldspannung von 6 kV und einem Druck von 5 Torr betrug die Feldstromstärke 2,2 mA. Bei niedrigeren Feldspannungen wurden höhere Drucke bis zu 10 Torr angewandt.

Aus Gründen der Reinheit wurde eine große Durchströmung von etwa 250 cm³/h gewählt. Der Feldplattenabstand betrug 0,5 mm. Nach Ablauf der genannten Einbrennzeit war der photographierte Spektralbereich frei von

störenden Banden, insbesondere waren die bei Betriebsbeginn auftretenden Banden OH 3122; NH 3360; NH 3370 verschwunden.

Von einer Aufnahme der unzerlegten He⁺3202-Linie in Überlagerung der aufgespaltenen Linie wurde abgesehen, da mit der hierfür zu benutzenden Hilfsröhre die erforderliche Reinheit des Spektrums nur durch größeren experimentellen Aufwand hätte erzielt werden können. Bei den hohen Feldstärken erschien sie ohnehin von selber durch unvermeidliche schwache Nebenentladungen weit außerhalb des Feldraumes im Beobachtungstubus.

Sämtliche Aufnahmen einer Serie wurden nacheinander in ununterbrochenem Betrieb gemacht. Dabei wurde 8 bis 12 Stunden exponiert. Für die kleineren Feldstärken von 30 kV/cm und weniger genügten zwei Stunden.

Berechnung der Aufspaltung des Niveaus $n = 5$

Die He⁺ 3203-Linie entspricht dem Quantenübergang von $n = 5$ nach $n' = 3$. Nach Leo⁵⁾ sind an der unzerlegten Linie folgende Feinstrukturkomponenten zu beobachten:

Ia	3203,169	Intensität 4
IIb	3203,118	Intensität 5
IIIc	3203,961	Intensität 1

Auf Grund der sich theoretisch ergebenden Auflösung von 0,09 Å müßte die Komponente III c von den beiden anderen zu trennen sein. Wenn auch das praktische Auflösungsvermögen etwas ungünstiger ist, so daß eine vollständige Trennung nicht erreicht wird, so ist der Einfluß der Feinstruktur an der unaufgespaltenen Linie an den eigenen Aufnahmen doch deutlich zu erkennen (Abb. 3). Aus diesem Grunde erschien es notwendig, bei der Berechnung der Aufspaltung im Starkeffekt die Feinstruktur zu berücksichtigen.

Eine ausführliche Darstellung der Theorie findet sich bei Bethe⁶⁾. Nach ihr hat Günther die Aufspaltung der Niveaus $n = 3$ und $n = 4$ für den Grenzfall großer Feldstärken in „asymptotischer Näherung“ berechnet. Es ist also in der vorliegenden Arbeit die entsprechende Berechnung für das Niveau $n = 5$ durchzuführen.

Wir schließen an die Darstellung in der zitierten Güntherschen Arbeit²⁾ auf S. 358 an. Die zu $n = 5$ gehörigen Eigenfunktionen werden in dem in Tab. 1 angegebenen Schema durchnumeriert.

Tabelle 1
Numerierung der Eigenfunktionen

U	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$ m_j $	9	7			5								3			
m_l	4	4	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
r	+	—	+	+	—	—	+	+	+	—	—	—	+	+	+	+
j	9	7	9	7	7	5	9	7	5	7	5	3	9	7	5	3
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
l	4	4	4	3	4	3	4	3	2	4	3	2	4	3	2	1

⁵⁾ W. Leo, Ann. Physik (4) 81, 757 (1926).

⁶⁾ H. Bethe, Handb. d. Physik (Geiger-Scheel) Bd. 24/I, 2. Aufl. Springer, Berlin 1933, Kap. 3.

Tabelle 1 (Fortsetzung)

U	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$ m_j $					$\frac{1}{2}$				
m_l	1	1	1	1	0	0	0	0	0
r	—	—	—	—	+	+	+	+	+
j	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
l	4	3	2	1	4	3	2	1	0

Im Interesse der Übersichtlichkeit der Rechnung scheint uns jedoch anderer Abkürzungen, die von der Güntherschen Darstellung abweichen, günstiger zu sein. Wir setzen:

$$\frac{e^2 \alpha^2 z^4}{2 a n^3} = P \quad \frac{3 e a n}{2 z} \cdot F = Q.$$

Damit ergeben sich folgende Stördeterminanten, die gleich Null zu setzen und auszurechnen sind:

$$|m_j| = \frac{9}{2}$$

	1
1	$-\left(\frac{1}{5} P + \varepsilon\right)$

$$|m_j| = \frac{7}{2}$$

	2	3	4
2	$-\left(\frac{11}{45} P + \varepsilon\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{90} P$	0
3	$\frac{\sqrt{2}}{90} P$	$-\left(\frac{37}{180} P + \varepsilon\right)$	Q
4	0	Q	$-\left(\frac{1}{4} P + \varepsilon\right)$

$$|m_j| = \frac{5}{2}$$

	5	6	7	8	9
5	$-\left(\frac{43}{180} P + \varepsilon\right)$	Q	$\frac{\sqrt{14}}{180} P$	0	0
6	Q	$-\left(\frac{9}{28} P + \varepsilon\right)$	0	$\frac{\sqrt{6}}{84} P$	0
7	$\frac{\sqrt{14}}{180} P$	0	$-\left(\frac{19}{90} P + \varepsilon\right)$	$2 \sqrt{\frac{3}{7}} Q$	0
8	0	$\frac{\sqrt{6}}{84} P$	$2 \sqrt{\frac{3}{7}} Q$	$-\left(\frac{11}{42} P + \varepsilon\right)$	$\frac{4}{\sqrt{7}} Q$
9	0	0	0	$\frac{4}{\sqrt{7}} Q$	$-\left(\frac{1}{3} P + \varepsilon\right)$

	10	11	12
10	$-\left(\frac{7}{30}P + \varepsilon\right)$	$2\sqrt{\frac{3}{7}}Q$	0
11	$2\sqrt{\frac{3}{7}}Q$	$-\left(\frac{1}{3}P + \varepsilon\right)$	$4\sqrt{\frac{1}{7}}Q$
12	0	$4\sqrt{\frac{1}{7}}Q$	$-\left(\frac{7}{15}P + \varepsilon\right)$
13	$\frac{\sqrt{2}}{60}P$	0	0
14	0	$\frac{\sqrt{10}}{84}P$	0
15	0	0	$\frac{-1}{15}P$
16	0	0	0

$$|m_j| = \frac{3}{2}$$

	17	18	19	20
17	$-\left(\frac{41}{180}P + \varepsilon\right)$	$\sqrt{\frac{15}{7}}Q$	0	0
18	$\sqrt{\frac{15}{7}}Q$	$-\left(\frac{25}{45}P + \varepsilon\right)$	$8\sqrt{\frac{2}{35}}Q$	0
19	0	$8\sqrt{\frac{2}{35}}Q$	$-\left(\frac{13}{30}P + \varepsilon\right)$	$\sqrt{\frac{21}{5}}Q$
20	0	0	$\sqrt{\frac{21}{5}}Q$	$-\left(\frac{5}{6}P + \varepsilon\right)$
21	$\frac{\sqrt{5}}{45}P$	0	0	0
22	0	$\frac{\sqrt{3}}{21}P$	0	0
23	0	0	$\frac{\sqrt{6}}{15}P$	0
24	0	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{6}P$
25	0	0	0	0

$$|m_j| = \frac{1}{2}$$

13	14	15	16
$\frac{\sqrt{2}}{60} P$	0	0	0
0	$\frac{\sqrt{10}}{84} P$	0	0
0	0	$\frac{1}{15} P$	0
$-\left(\frac{13}{60} P + \varepsilon\right)$	$\sqrt{\frac{15}{7}} Q$	0	0
$\sqrt{\frac{15}{7}} Q$	$-\left(\frac{23}{84} P + \varepsilon\right)$	$8 \sqrt{\frac{2}{35}} Q$	0
0	$8 \sqrt{\frac{2}{35}} Q$	$-\left(\frac{11}{30} P + \varepsilon\right)$	$\sqrt{\frac{21}{5}} Q$
0	0	$\sqrt{\frac{21}{5}} Q$	$-\left(\frac{1}{2} P + \varepsilon\right)$

21	22	23	24	25
$\frac{\sqrt{5}}{45} P$	0	0	0	0
0	$\frac{\sqrt{3}}{21} P$	0	0	0
0	0	$\frac{\sqrt{6}}{15} P$	0	0
0	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{6} P$	0
$-\left(\frac{2}{9} P + \varepsilon\right)$	$\frac{4}{\sqrt{7}} Q$	0	0	0
$\frac{4}{\sqrt{7}} Q$	$-\left(\frac{2}{7} P + \varepsilon\right)$	$\frac{12}{\sqrt{35}} Q$	0	0
0	$\frac{12}{\sqrt{35}} Q$	$-\left(\frac{2}{5} P + \varepsilon\right)$	$2 \sqrt{\frac{7}{5}} Q$	0
0	0	$2 \sqrt{\frac{7}{5}} Q$	$-\left(\frac{2}{3} P + \varepsilon\right)$	$2 \sqrt{2} Q$
0	0	0	$2 \sqrt{2} Q$	$-(P + \varepsilon)$

Zur Vereinfachung wurde das Glied $\frac{3}{4n} \cdot P \cdot \delta e_i e' \cdot \delta m_e; m'_e$ in ε als Summand hineingezogen. Somit bedeutet ε die um $\frac{3}{4n} \cdot P$ vermehrte Zusatzenergie gegenüber dem Energiewert E_0 des ungestörten „Wasserstoffproblems“ (ohne Feinstruktur und ohne Feld).

Die Ausrechnung der Determinanten ist außerordentlich langwierig und unübersichtlich. Der Rechenaufwand ist für dem im Endresultat angestrebten Grad der Näherung nicht erforderlich. Es soll daher eine vereinfachte Form der Berechnung am Beispiel der neunreihigen Determinante $|m_j| = 1/2$ behandelt werden.

Die exakte Ausrechnung der Determinanten würde eine Potenzreihe in ε vom 9ten Grade ergeben, die sogenannte Säkulargleichung

$$\sum_{k=0}^9 A_k \varepsilon^k = 0.$$

Hierbei sind die A_k Potenzreihen in Q vom höchsten 9- k -ten Grade

$$A_k = \sum_{i=0}^{9-k} a_{ik} Q^i.$$

Eine Lösung der Säkulargleichung muß die Form

$$\varepsilon = \alpha_1 Q + \alpha_0 + \alpha_{-1} \frac{1}{Q} + \alpha_{-2} \frac{1}{Q^2} + \dots$$

haben, da sie nämlich für große Feldstärken, d. h. für große Werte von Q , asymptotisch in eine Gerade übergehen muß. Für die Rechnung genügt es, die beiden ersten Glieder zu berücksichtigen, welche die Geradengleichung für die Asymptoten bilden. Geht man also mit dem Ansatz

$$\varepsilon = \alpha_1 Q + \alpha_0$$

in die Säkulargleichung ein, so lassen sich die $\alpha_1; \alpha_0$ durch Koeffizientenvergleich aus den a_{ik} bestimmen. Es ist ersichtlich, daß dabei nur diejenigen a_{ik} in die Rechnung eingehen, für die $i + k = 9$ oder 8 ist. Man braucht daher bei der Ausrechnung der Determinanten von vornherein nur diejenigen Matrixelemente zu berücksichtigen, die zu den genannten a_{ik} einen Beitrag leisten. Diese lassen sich aber leicht durch folgende Überlegung finden:

Eine Determinante läßt sich dadurch ausrechnen, daß man für jede mögliche Permutation der Spalten die Hauptdiagonale ausmultipliziert und dann über alle so erhaltenen Hauptdiagonalprodukte summiert. Dabei ist die Vorzeichenregel zu beachten, daß sich nämlich beim Vertauschen der ν -ten mit der μ -ten Spalte die Determinante mit $(-1)^{\nu+\mu}$ multipliziert. Den Koeffizienten a_{ik} erhält man dadurch, daß man nur solche Spaltenpermutationen zuläßt, bei denen in der Hauptdiagonalen i Elemente mit dem Faktor Q und k Elemente mit dem Faktor ε vorkommen. Die Summe der Hauptdiagonalprodukte für alle durch diese Vorschrift ausgesonderten Spaltenpermutationen ist gleich a_{ik} . Da sich die Zahl der zulässigen Permutationen aus den Gesetzen der Kombinatorik entnehmen läßt, bleibt die Übersicht und die Kontrolle über die Rechnung gewahrt, während die sonst übliche exakte Ausrechnung einer Determinante sehr verwirrend ist.

Auf die oben geschilderte Weise wurden alle diejenigen a_{ik} berechnet, die für die asymptotische Näherung einen Beitrag leisten. Die Durchführung eines

Beispiels soll aus Platzgründen unterbleiben (vgl. Original der Dissertation¹⁾). Damit ergaben sich folgende Säkulargleichungen:

$$\begin{aligned}
 |m_j| &= 1/2 \\
 \varepsilon^9 + 4,37 \cdot P \cdot \varepsilon^8 - 30,00 \cdot Q^2 \cdot \varepsilon^7 - 98,59 \cdot Q^2 \cdot \varepsilon^6 + 273,00 \cdot Q^4 \cdot \varepsilon^5 \\
 + 623,31 \cdot P \cdot Q^4 \cdot \varepsilon^4 - 820,00 \cdot Q^6 \cdot \varepsilon^3 - 1091,34 \cdot P \cdot Q^6 \cdot \varepsilon^2 + 576,00 \cdot Q^8 \cdot \varepsilon \\
 + 246,86 \cdot P \cdot Q^8 + \text{kleine Größen} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |m_j| &= 3/2 \\
 \varepsilon^7 + 2,39 \cdot P \cdot \varepsilon^6 - 14,00 \cdot Q^2 \cdot \varepsilon^5 - 23,63 \cdot P \cdot Q^2 \cdot \varepsilon^4 + 49,00 \cdot Q^4 \cdot \varepsilon^3 \\
 + 48,35 \cdot P \cdot Q^4 \cdot \varepsilon^2 - 36,00 \cdot Q^6 \cdot \varepsilon - 12,00 \cdot P \cdot Q^6 + \text{kleine Größen} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |m_j| &= 5/2 \\
 \varepsilon^5 + 1,37 \cdot P \cdot \varepsilon^4 - 5,00 \cdot Q^2 \cdot \varepsilon^3 - 4,10 \cdot P \cdot Q^2 \cdot \varepsilon^2 + 4,00 \cdot Q^4 \cdot \varepsilon \\
 + 1,05 \cdot P \cdot Q^4 + \text{kleine Größen} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |m_j| &= 7/2 \\
 \varepsilon^3 + 0,70 \cdot P \cdot \varepsilon^2 + \varepsilon \{0,163 \cdot P^2 - Q^2\} \\
 - \left\{ \frac{1}{16\,200} \cdot P^3 - 0,245 \cdot P \cdot Q^2 \right\} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |m_j| &= 9/2 \\
 \varepsilon + 0,20 P &= 0.
 \end{aligned}$$

Die Determinante $|m_j| = 7/2$ wurde exakt ausgerechnet, da sie nur dreireihig ist. In den anderen Gleichungen sind unter kleinen Größen solche Glieder zu verstehen, die zur asymptotischen Näherung keinen Beitrag liefern.

Diese Säkulargleichungen werden durch Einsetzen eines Lösungsansatzes der Form

$$\varepsilon = \alpha_1 Q + \alpha_0$$

und Durchführung des Koeffizientenvergleiches gelöst. Es ergeben sich folgende Lösungen:

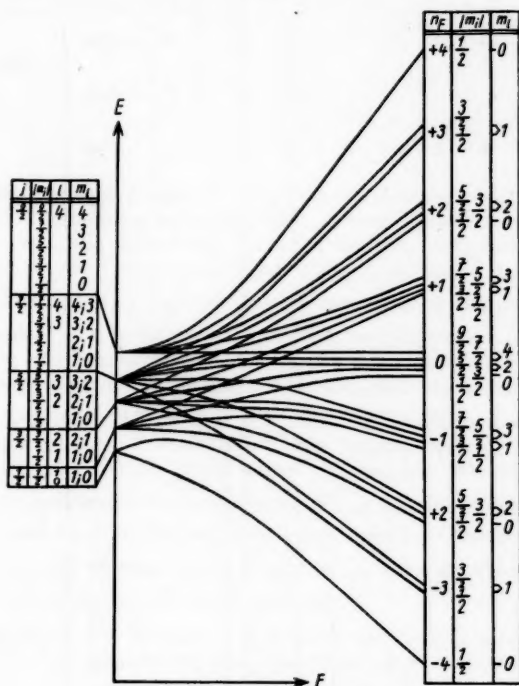
$ m_j = 9/2$	$\varepsilon =$	$-0,20 \cdot P$
$ m_j = 7/2$	$\varepsilon =$	$-0,24 \cdot P$
	$\varepsilon = \pm$	$Q - 0,23 \cdot P$
$ m_j = 5/2$	$\varepsilon =$	$-0,26 \cdot P$
	$\varepsilon = \pm$	$Q - 0,28 \cdot P$
	$\varepsilon = \pm 2 \cdot$	$Q - 0,27 \cdot P$
$ m_j = 3/2$	$\varepsilon =$	$-0,33 \cdot P$
	$\varepsilon = \pm$	$Q - 0,31 \cdot P$
	$\varepsilon = \pm 2 \cdot$	$Q - 0,36 \cdot P$
	$\varepsilon = \pm 3 \cdot$	$Q - 0,35 \cdot P$
$ m_j = 1/2$	$\varepsilon =$	$-0,43 \cdot P$
	$\varepsilon = \pm$	$Q - 0,44 \cdot P$
	$\varepsilon = \pm 2 \cdot$	$Q - 0,46 \cdot P$
	$\varepsilon = \pm 3 \cdot$	$Q - 0,45 \cdot P$
	$\varepsilon = \pm 4 \cdot$	$Q - 0,62 \cdot P$

ation¹⁾).

Hieraus erhält man die wahren Werte der Aufspaltungsenergie, indem man $\frac{3}{20}P$ zu ϵ hinzuaddiert und ferner für P und Q die entsprechenden Zahlenwerte einsetzt.

· $Q^8 \cdot \epsilon$

Abb. 1 zeigt schematisch die Aufspaltungsenergie E des Niveaus $n = 5$ in Abhängigkeit von der Feldstärke F . Ohne Feld ist lediglich die Feinstruktur vorhanden, die durch die Relativität der Masse und die Spin—Bahn-Kopplung

Abb. 1. Aufspaltung des Niveaus $n = 5$

hervorgerufen wird. Jedes dieser Feinstruktur-niveaus ist eindeutig durch Angabe der Quantenzahl j gekennzeichnet. Neben j sind noch die Quantenzahlen $|m_j|$ und l angegeben. Die Kennzeichnung durch m_l hat nur formale Bedeutung, da im Feinstrukturproblem die Z -Komponente des Bahndrehimpulses keine gute Quantenzahl ist.

Beim Einschalten eines schwachen elektrischen Feldes spalten die Feinstruktur-niveaus $j = 7/2; 5/2; 3/2; 1/2$ linear in $2(j + 1/2)$ Komponenten auf. Das Niveau $j = 9/2$ spaltet erst bei etwas größeren Feldstärken im quadratischen Effekt $(j + 1/2)$ -fach auf (Starkeffekt der Feinstruktur).

Im Bereich mittlerer Feldstärken ordnen sich die aufgespaltenen Komponenten um und gehen dann asymptotisch in Geraden über. In der vorliegenden Rechnung wurden die Gleichungen dieser Geraden bestimmt. Jede

Tabelle 2
 Berechnete Feinstrukturkomponenten (cm^{-1})

π -Komponenten $\Delta m_1 = 0; \Delta m_2 = 0$											
N	n_F	n'_F	m_1	m'_1	Δm_1	m_2	m'_2	Δm_2	Feinstr.	Grobstr. 10 ⁵ F	Quad. Eff. 10 ¹⁰ F ²
± 14	± 4	± 2	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	+1,33	$\pm 44,77$	-0,08
± 12	± 3	± 1	1	1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	+0,49	$\pm 38,38$	-0,08
						$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	+1,11		
± 10	± 2	0	2	2	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	+0,20	$\pm 31,99$	-0,08
						$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	+0,59		
						$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	+0,98		
± 8	± 1	± 1	1	1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	+0,51	$\pm 25,60$	-0,03
						$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	+1,12		
σ -Komponenten $\Delta m_1 = \pm 1; \Delta m_2 = 0$											
± 9	± 3	± 2	1	0	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	+1,53	$\pm 28,78$	-0,08
						$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		+1,46		
± 7	± 2	± 1	2	1	-1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	+0,54	$\pm 22,39$	-0,08
						$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$		+1,18		
			0	1	+1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	+1	+0,40		-0,09
						$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		+1,11		
± 5	± 1	0	3	2	-1	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	-1	+0,23	$\pm 15,99$	-0,07
						$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$		+0,65		
			1	0	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$		+1,09		-0,09
						$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		+0,99		
			1	2	+1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	+1	+0,17	-0,09	
						$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$		+0,53		

Tabelle 2 (Fortsetzung)

σ -Komponenten $\Delta m_l = \pm 1$; $\Delta m_s = 0$												
N	n_F	n'_F	m_l	m'_l	Δm_l	m_j	m'_j	Δm_j	Feinstr.	Grobstr. $10^5 F$	Quad.Eff. $10^{10} F^2$	
± 3	0	± 1	2	1	-1	$\left\{ \begin{array}{c} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{array} \right\}$	-1	+0,55	$\pm 9,60$	-0,08	
									+1,20			
			0	1	+1	$\left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{2}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{array} \right\}$	+1	+0,63			
									+1,13			-0,09

dieser Geraden ist durch Angabe der sogenannten elektrischen Quantenzahl n_F und durch $|m_j|$ eindeutig gekennzeichnet. Durch Einschalten des elektrischen Feldes wird die Entartung bezüglich der $|m_j|$ aufgehoben, die Entartung bezüglich des Vorzeichens bleibt jedoch bestehen, d. h. Linksumlauf und Rechtsumlauf sind energetisch gleichwertig. Bahndrehimpuls \vec{L} und Gesamtdrehimpuls \vec{J} sind nicht mehr gequantelt, und daher sind l und j sinnlos geworden. Da sich bei großen Feldstärken der Bahndrehimpuls und der Spin entkoppeln, sind am rechten Rand von Abb. 1 m_l und $|m_j|$ angegeben.

Die näherungsweise Berechnung z. B. der Determinanten $|m_j| = 1/2$ nach dem oben angegebenen Prinzip führte zur Vernachlässigung der Matrixelemente 17;21 18;22 19;23 20;24 (siehe Original der Dissertation¹). Es sind dies aber gerade die Matrixelemente H_{l',m_l}^{l,m_l} der Spin-Bahn-Kopplung, für die $l = l'$ und $m_l \neq m'_l$ ist (vgl. Tab. 1 und siehe bei Günther²).

Das bedeutet, die Rechnung wurde so durchgeführt, als wäre L_z eine gute Quantenzahl, als wären also \vec{L} und \vec{S} entkoppelt.

Die Aufspaltung des Niveaus $n = 3$ ist in der Güntherschen Arbeit²) behandelt. Bei der Berechnung der Übergänge werden diese Werte übernommen.

Berechnung der Übergänge

Zur Berechnung der Übergänge muß man die Auswahlregeln kennen. In dem hier vorliegenden Fall kann man das Problem genau analog zum Fall der Grobstruktur behandeln. Da nämlich Spin und Bahndrehimpuls entkoppelt sind, bestehen die Eigenfunktionen aus einer Linearkombination der üblichen Wasserstoffeigenfunktionen, die alle gleiches n und gleiches m_e haben, jeweils multipliziert mit einer Spinfunktion. Somit ergeben sich bei der Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten die gleichen Integrale, wie im Fall der Grobstruktur. Wenn man voraussetzt, daß keine Spinumklappungen vorkommen, erhält man somit die bekannten Auswahlregeln des Starkeffektes:

$$\begin{array}{lll} \Delta m_l = 0 & \text{für} & \pi\text{-Komponenten} \\ \Delta m_l = \pm 1 & \text{für} & \sigma\text{-Komponenten.} \end{array}$$

Kullenberg⁷⁾ hat für den Fall der Grobstruktur die Intensitäten aller Übergänge berechnet. Danach sind nur folgende Komponenten beobachtbar:

$$\pi: N = \pm 8; \pm 10; \pm 12; \pm 14$$

$$\sigma: N = \pm 3; \pm 5; \pm 7; + 9.$$

Hierbei bedeutet: $N = 5 n_F - 3 n_F$.

In der eigenen Rechnung sind daher nur die Übergänge berücksichtigt worden, die sich als Feinstruktur zu diesen Grobstrukturkomponenten ergeben, wenn man obige Auswahlregeln anwendet.

Tab. 2 enthält als Gesamtergebnis der durchgeführten Rechnung die Frequenzen der Starkeffekt Komponenten, die theoretisch beobachtbar sein müßten. In Spalte 11 ist die Grobstrukturaufspaltung angegeben. Wie aus der vorangegangenen Rechnung ersichtlich ist, läßt sie sich durch die Formel

$$\Delta\nu = \pm \frac{C}{z} \cdot F \cdot N$$

darstellen. $C = \frac{3 e a}{2 h c}$ wird der Aufspaltungsfaktor genannt. Sein theoretischer Wert ist $C = 6,402 \text{ cm}^{-1}/\text{Volt/cm}$. Die Aufspaltung der Grobstruktur ist vollkommen symmetrisch. Der Einfluß der Feinstruktur besteht darin, daß zu den Aufspaltungswerten der Grobstruktur die in Spalte 10 enthaltenen Werte, die feldstärkeunabhängig sind, hinzuaddiert werden. Das Aufspaltungsbild wird dadurch unsymmetrisch. Es bekommt eine Verschiebung in Richtung kurzer Wellenlängen, die jedoch für alle Komponenten unterschiedlich ist.

Spalte 12 gibt den Einfluß des quadratischen Effektes an. Bei einer Feldstärke von 100 kV/cm ist dieser von einer Größenordnung, die entsprechend der Rechengenauigkeit bereits berücksichtigt werden muß. Bei der Auswertung

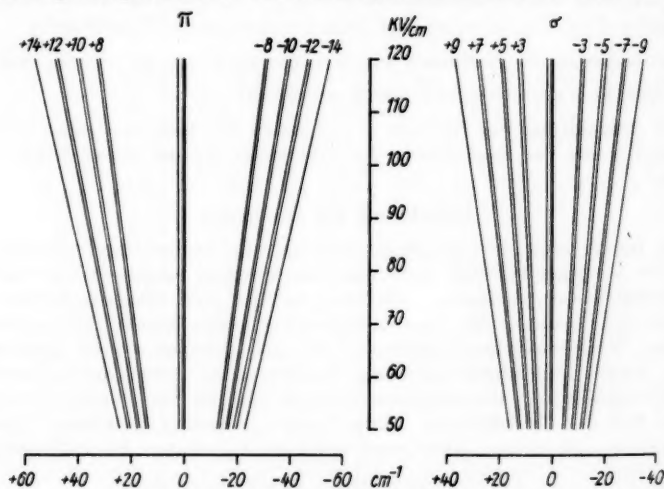


Abb. 2. Aufspaltungendiagramm für $\text{He}^+ 3203$

⁷⁾ B. Kullenberg, Z. Physik **90**, 567 (1934).

der Experimente ist diese Größenordnung jedoch nicht erreicht und der quadratische Effekt kann dort vernachlässigt werden.

Der Inhalt der Tab. 2 ist in Abb. 2 graphisch dargestellt. Dabei sind für jedes N nur die beiden äußeren Feinstrukturkomponenten gezeichnet. Die Diagramme sollen später der Auswertung der Aufnahmen dienen und sind in einem entsprechenden Maßstab gehalten. Wie gesagt, brauchte der quadratische Effekt nicht berücksichtigt zu werden.

Um einen Überblick zu gewinnen, bis zu welchen Feldstärken herunter die asymptotische Näherung brauchbar ist, wurde in einfach zu behandelnden Fällen die nächst höhere Näherung durchgeführt. Es ergab sich, daß bei der Feldstärke von 50 kV/cm, der niedrigsten zur Auswertung der Experimente in Rechnung zu setzenden Feldstärke, der Einfluß des Gliedes $\alpha_{-1} Q^{-1}$ von der Größenordnung $0,01 \text{ cm}^{-1}$ ist und also nicht mehr berücksichtigt zu werden braucht. Der Einfluß des Lambshifts beträgt nach den bei Günther durchgeführten Überlegungen $0,04 \text{ cm}^{-1}$ und liegt damit auch unterhalb der Größenordnung, die noch zu berücksichtigen wäre.

Auswertung der Aufnahmen

Es wurden Aufnahmen bei fünf verschiedenen Feldstärken gemacht, nämlich bei ungefähr 120, 90, 60, 30, 15 kV/cm. Jede Aufnahme umfaßte den Spektralbereich von 3070 bis 3400 Å. Von den neben der $\text{He}^+ 3203$ erschienenen Linien ist die Parheliumgruppe $2S-7Q$ ($Q = S, P, D, F, G, H, I$) von Interesse.

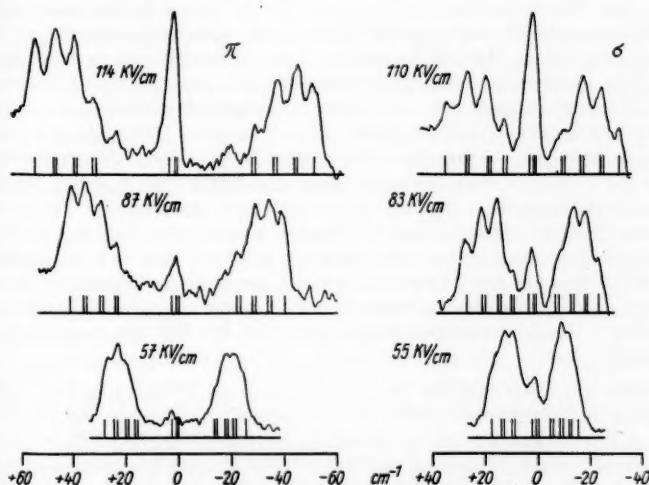


Abb. 3. Aufspaltung der $\text{He}^+ 3203$ -Linie

Die Dispersion wurde aus dem mitphotographierten Spektrum eines Eisenbogens bestimmt. Sie betrug in der Nähe der Wellenlänge $\lambda = 3203 \text{ Å}$ $3,89 \text{ Å je mm}$, entsprechend in Wellenzahlen $37,8 \text{ cm}^{-1}/\text{mm}$. Infolge der guten Tem-

peraturkonstanz war sie innerhalb der Meßgenauigkeit auf allen Aufnahmen gleich. Die Auflösung sollte theoretisch $1,2 \text{ cm}^{-1}$ betragen. Praktisch ist dieser Wert jedoch nicht erreicht worden wegen der endlichen Spaltweite. Diese betrug $1/_{100} \text{ mm}$. Das optische System des Spektrographen vergrößerte etwa 2,5fach. Berücksichtigt man ferner, daß die Photoplatte wegen der Verwendung von Quarzoptik stark gegen den Strahlengang geneigt war, so ergibt sich ein etwa fünffach vergrößertes Spaltbild. Somit hat die einzelne Spektral-

linie als Abbild des Spaltes schon eine Breite von $1,5 \text{ cm}^{-1}$.

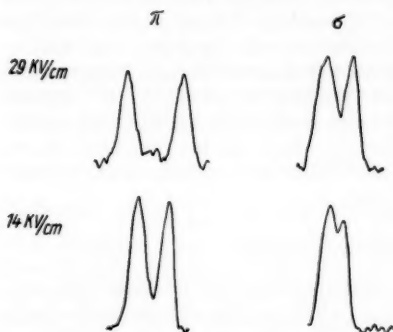


Abb. 4. Aufspaltung der $\text{He}^+ 3203$ -Linie

Bei der Steubing-Schaederschen Röhre ist es leider nicht möglich, die Feldstärke direkt aus dem Plattenabstand und der angelegten Feldspannung zu bestimmen. Durch die Löcher in der Kathodenplatte wird das Feld geringfügig verzerrt und dadurch verringert sich die effektive Feldspannung etwas. Nach Messungen von Günther an einem Modell im elektrolytischen Trog liegt diese effektive Feldstärke etwa 10 bis 15 % tiefer als der Quotient Spannung/Abstand. Setzt man den theoretischen Wert des Aufspaltungsfaktors als richtig voraus, so kann man die Feldstärke aus der Linienaufspaltung berechnen. In der vorliegenden Arbeit geschah die Feldstärkebestimmung einfach dadurch, daß die Photometerkurven (Abb. 3) auf die Aufspaltungsdiagramme (Abb. 2) draufgepaßt wurden. Die sich so ergebenden Feldstärken sind auf den Photometerkurven angegeben. Unterhalb 50 kV/cm war eine Auswertung der Aufnahmen nicht mehr möglich, daher ist in die Kurven der Abb. 4 keine Struktur eingetragen. Die Feldstärkenangaben sind geschätzt.

Es fällt auf, daß sich für die π -Komponenten in der Regel ein um 4 % niedrigerer Feldstärkewert ergibt als für die σ -Komponenten, obwohl die verglichenen Photometerkurven zu derselben Aufnahme gehören. Dies hat keine prinzipiellen Ursachen sondern ist lediglich die Folge einer geringen Inhomogenität des Feldes. Ist nämlich bei der Abbildung der Lichtquelle auf den Spalt der Kalkspatrhomboeder, der den Strahlengang in die verschiedenen Polarisationsrichtungen zerlegt, nicht ganz einwandfrei justiert, so ist der Feldausschnitt, welcher der Spaltöffnung entspricht, für beide Polarisationsrichtungen nicht derselbe. Tatsächlich hatten Aufnahmen ohne Kalkspatrhomboeder nicht diese Diskrepanz in den Feldstärken.

Die Durchführung des Auswerteverfahrens zeigte, daß die sich ergebenden Feldstärken gut definiert sind. Verschiebungen der Photometerkurve auf dem Aufspaltungsdiagramm, die den ermittelten Feldstärkewert um 1 % änderten, erscheinen bereits unpassend. Der als passend gefundene Feldstärkebereich wird vor allen Dingen durch Angabe der Feinstrukturkomponenten eingengt.

Der Vergleich von Theorie und Experiment ist unbefriedigend, solange man die Feldstärke aus der Aufspaltung der untersuchten Linie selbst entnimmt. Eine Möglichkeit zur unabhängigen Feldstärkebestimmung ergibt sich durch Ausmessen der Effekte an anderen Linien, deren elektrische Beeinflussbarkeit bekannt ist. Hierzu ist die Parheliumgruppe $2S-7Q$ gut geeignet. Ihr elektrisches Verhalten ist von K. Sjögren⁸⁾ untersucht worden. Seiner Arbeit ist Abb. 5 entnommen.

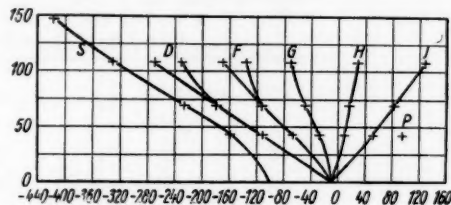


Abb. 5. Aufspaltung der Parheliumgruppe $2S-7Q$ im elektrischen Feld

Man sieht, daß die Linienverschiebung entsprechend theoretischer Aussage linear erfolgt. Die Linien ($2S-7D$) und ($2S-7F$) sind aufgespalten in π - und σ -Komponenten. Bei den Sjögrenschen Messungen wurde der Polarisationszustand im UV wegen schlechter Intensität nicht bestimmt. Die eigenen Aufnahmen zeigen, daß auch die Linien G, H, I in π - und σ -Komponenten zerlegt sind.

Zur Feldstärkebestimmung wurden die Linien ($2S-7S$) und ($2S-7H$) herangezogen. ($2S-7S$) ist die elektrisch am stärksten beeinflussbare Linie. Wie theoretisch zu begründen, ist nur das Auftreten einer π -Komponente zu erwarten. Wegen ihrer hohen elektrischen Empfindlichkeit kann man aus ihren Verbiegungen und Verwaschungen Aussage über die Größe der Inhomogenität des Feldes gewinnen. Hierbei ist es besonders vorteilhaft, daß die Linien des sogenannten Parheliums keine Feinstruktur besitzen. ($2S-7H$) ist die elektrisch unempfindlichste Linie der Gruppe und sie ist daher scharf. Da auf den eigenen Aufnahmen die σ -Komponente die weitaus intensivere ist, wurde diese mit dem bei Sjögren angegebenen Meßwert identifiziert.

Aus dem Abstand der genannten Linien, die also nicht den gleichen Polarisationszustand besitzen, wurden die Feldstärken berechnet. Bei der Auswertung der Aufspaltung der He^{+3203} -Linie hatte sich ergeben, daß auf derselben Aufnahme die π - und die σ -Komponenten unterschiedlichen Feldstärken unterlegen waren. Da jedoch die Linie ($2S-7S$) π elektrisch viel empfindlicher ist als die ($2S-7H$) σ , gilt die errechnete Feldstärke für die π -Komponente und der Fehler beträgt nur $1/3$ %.

Es sei erwähnt, daß Sjögren zwar nach der Kanalstrahlmethode gearbeitet hat, doch hat er seine Feldstärkewerte nicht direkt aus Spannung und Plattenabstand bestimmt sondern aus der Aufspaltung von Wasserstofflinien. Man muß daher bei seinen Meßwerten mit Unsicherheiten rechnen, die 1 % überschreiten.

⁸⁾ K. Sjögren, Experimentelle Untersuchungen des Starkeffektes bei Wasserstoff und Helium. Dissertation Lund 1934.

Tab. 3 enthält in Spalte 2 die sich aus der Aufspaltung der Parheliumgruppe ergebenden Feldstärken. Ferner ist die aus der Linienunschärfe zu schließende Inhomogenität des Feldes angegeben. Sie beträgt 6 %.

Tabelle 3

Aufnahme Nr.	Feldstärke kv/cm			
	Aus den Linien (2 S—7 S) und (2 S—7 H)		Aus der He ⁺ 3203-Linie	
			π -Komp.	σ -Komp.
1	111	$\begin{smallmatrix} +3 \\ -4 \end{smallmatrix}$	114	110
	(115)			
2	85	$\begin{smallmatrix} +2 \\ -3 \end{smallmatrix}$	87	83
3	55	± 2	57	55

Bei der Durchführung der Rechnung wurde zwischen den Sjögrenschen Meßpunkten bei 109, 70, 44 kV/cm interpoliert. Diese Meßpunkte liegen mit befriedigender Genauigkeit auf einer Geraden (Abb. 5). Für die Linie (2 S bis 7 S) ist jedoch noch ein weiterer Meßpunkt bei 148 kV/cm angegeben, der merklich von der Linearität abweicht. Berücksichtigt man diese Abweichung, so ergibt sich für Aufnahme 1 eine etwas höhere Feldstärke. Sie ist in Klammern beigelegt. Dies Abweichen von der Linearität in der elektrischen Verschiebung der Parheliumkomponenten ist theoretisch nicht zu verstehen und es ist daher zu erwägen, ob es sich um einen Meßfehler handelt, so daß die in Abb. 5 gegebene Kurve S durch die vier Meßpunkte von einer Geraden zu approximieren wäre. Der Verlauf einer solchen Geraden bliebe aber unsicher, da die Zahl der Meßpunkte zu gering ist. Die in Spalte 2 der Tab. 3 angegebenen Feldstärken entsprechen einer Geraden, die durch die drei linear zueinander gelegenen Punkte hindurchgeht.

Spalte 3 und 4 enthalten die sich aus der Aufspaltung von He⁺3203 ergebenden Feldstärken. Ein Vergleich zeigt, daß die auf verschiedene Weisen ermittelten Feldstärkewerte für die π -Komponenten systematisch um etwa 3 % voneinander abweichen, innerhalb der durch die Inhomogenität des Feldes gegebenen Grenzen stimmen sie jedoch überein. Diese Abweichungen liegen wahrscheinlich in der Wahl der Geraden begründet, die zur Interpolation der Sjögrenschen Meßpunkte diente. Der in Klammern beigelegte Feldstärkewert, der bei Berücksichtigung der Abweichung des Meßpunktes 148 kV/cm von der Linearität erhalten wurde, stimmt mit dem entsprechenden Feldstärkewert in Spalte 3 gut überein. Man kann daraus schließen, daß es durchaus möglich ist, die Meßpunkte in zuverlässiger Weise durch eine Gerade zu approximieren, die mit Spalte 3 gut übereinstimmende Feldstärkewerte liefert.

Somit kann also festgestellt werden, daß die experimentell gefundene Aufspaltung der He⁺3203-Linie mit der berechneten Aufspaltung innerhalb der Genauigkeit übereinstimmt, mit der die Feldstärke bestimmt werden kann. Trotz der Inhomogenität des Feldes von etwa 6 % und der daraus folgenden

Verwaschung elektrisch beeinflusster Linien ergibt sich bei richtiger Justierung der Abbildung (vgl. Original der Disseration¹⁾) für das Intensitätsmaximum eine auf etwa 1 % definierte effektive Feldstärke.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die die Mittel zur Beschaffung des Registrier-Mikrophotometers nach M. Renninger bewilligt hat, möchten wir auch an dieser Stelle unseren herzlichen Dank aussprechen.

H a m b u r g, Physikalisches Staatsinstitut.

Bei der Redaktion eingegangen am 29. März 1958.

Zur Theorie der Hydridmoleküle nach dem Modell des vereinigten Atoms

Von R. Gáspár und I. Tamássy-Lentei

Mit 2 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Mit Hilfe des in der Spektroskopie der Moleküle bei der Beschreibung der Termsysteme benutzten Modells des vereinigten Atoms werden die verschiedenen Eigenschaften der Moleküle mit der Variationsmethode berechnet. In diesem Modell haben wir die Atomkerne in der geometrischen Anordnung des Moleküls beibehalten und die Moleküleigenfunktion aus Einzentren-Einelektronen-Eigenfunktionen nach dem Slaterschen Verfahren aufgestellt. Bei dieser Näherung sind gute Ergebnisse für Hydridmoleküle zu erwarten. Die Rechnungen haben wir für die Moleküle HF und H_2O , ferner für das Molekülion $(HO)^-$ durchgeführt. Die berechneten Werte der totalen Energie, des Kernabstandes, sowie der Dissoziationsenergie dieser Moleküle stimmen mit den experimentellen Werten gut überein. Es ist ein großer Vorteil der Methode, daß der analytische Teil der Rechnungen nicht langwieriger ist, als bei Atomproblemen.

Einleitung

In der Molekülspektroskopie ist es schon seit längerer Zeit üblich, mit Hilfe des Modells des vereinigten Atoms eine Übersicht über das Termsystem eines Moleküls zu verschaffen. Dieses Modell entsteht, indem man sämtliche im Molekül vorhandene Atomkerne in einem Punkt vereinigt denkt, wodurch nach einer Umordnung der Elektronen ein Atom bzw. ein Ion entsteht, welches dann als das vereinigte „Atom“ des betreffenden Moleküls anzusehen ist. Bei einer adiabatischen Zusammenführung der Kerne in den Kern des „vereinigten Atoms“ erfahren die Energiewerte der einzelnen Elektronen eine stetige Änderung, und dadurch ergibt sich die Möglichkeit, aus der Lage der Energieniveaus des vereinigten Atoms und der separierten Atome bezüglich der Energieniveaus des Moleküls Schlüsse zu ziehen. Das Modell des vereinigten Atoms der Quantenchemie ist nun diesem Modell insofern ähnlich, als dabei die Eigenfunktion des Moleküls aus Einzentren-Einelektronen-Eigenfunktionen aufgebaut wird. Die Atomkerne werden jedoch nicht in einem Punkt vereinigt, sondern sie werden als in ihrer, der ursprünglichen geometrischen Anordnung des Moleküls entsprechenden Lage unbeweglich beharrend angesehen. Von den zugrunde gelegten Einzentren-Eigenfunktionen setzen wir nur voraus, daß sie ein vollständiges System bilden sollen. In denjenigen Fällen, wo das Molekül von einem Atom oder von einem Ion nur „wenig“ abweicht, wird das zugrunde gelegte Funktionensystem das Eigenfunktionen-

system dieses Atoms sein. Eine solche Wahl ist jedoch nur möglich, aber keineswegs notwendig, und gibt auch bei weitem nicht immer die beste Approximation.

Frühere Rechnungen¹⁾ haben gezeigt, daß sich diese Methode zur Untersuchung von angeregten Zuständen vortrefflich eignet. Später hat einer der Autoren bezüglich des Grundzustandes des Moleküls H_2^+ und des H_2 -Moleküls Rechnungen angestellt²⁾ und befriedigende Resultate erhalten, obwohl diese beiden Moleküle hinsichtlich der Anwendbarkeit des Modells des vereinigten Atoms bei weitem nicht als ideal anzusehen sind. Neuerdings haben auch andere Autoren mit Hilfe des Modells des vereinigten Atoms Rechnungen durchgeführt, welche wir später erörtern werden.

Endlich möchten wir hier noch einen ganz wesentlichen Vorzug des Modells des vereinigten Atoms hervorheben, nämlich den Umstand, daß bei der Energieberechnung höchstens Ein- und Zweizentrenintegrale auftreten. Somit fällt die Schwierigkeit fort, welche besonders in der Theorie der mehratomigen Moleküle durch das Auftreten von Mehrzentrenintegralen verursacht wird.

Der Anwendbarkeit des Modells werden dadurch Schranken gesetzt, daß es eine gewisse „Atomartigkeit“ des Moleküls voraussetzt. Für Hydridmoleküle trifft diese Voraussetzung in guter Näherung zu, da bei diesen, falls man von der Wirkung der Protonen absieht, der zentrale Atomkern und die Elektronen ein Atom bzw. ein Ion bilden, für welche die Einzentren-Beschreibung in der üblichen Weise durchführbar ist. Dementsprechend haben auch wir die Rechnungen für die Moleküle HF , $(\text{HO})^-$ und H_2O durchgeführt.

Die Methode

Wir haben die Untersuchungen auf Moleküle mit zehn Elektronen ausgedehnt, bei welchen das zugehörige vereinigte Atom im Grundzustande die Elektronenkonfiguration $(1s)^2 (2s)^2 (2p)^6$ besitzt. Die orthonormierten Einelektronen-Eigenfunktionen waren

$$\left. \begin{aligned} \psi_{1s} &= R_{10}(r) Y_{00}(\vartheta, \varphi) = 2 a^{3/2} e^{-ar} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\ \psi_{2s} &= R_{20}(r) Y_{00}(\vartheta, \varphi) = \left(\frac{12 b^5}{a^2 - a b + b^2} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{1}{3} (a + b) r \right] e^{-br} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\ \psi_{2px} &= R_{21}(r) \frac{Y_{11}(\vartheta, \varphi) + Y_{1,-1}(\vartheta, \varphi)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{c^5}{24} \right)^{1/2} r e^{-\frac{c}{2}r} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \psi_{2py} &= R_{21}(r) \frac{Y_{11}(\vartheta, \varphi) - Y_{1,-1}(\vartheta, \varphi)}{i\sqrt{2}} = \left(\frac{c^5}{24} \right)^{1/2} r e^{-\frac{c}{2}r} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \psi_{2pz} &= R_{21}(r) Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \left(\frac{d^5}{24} \right)^{1/2} r e^{-\frac{d}{2}r} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die in (1) auftretenden Konstanten a , b , c , c' und d sollen vorläufig unbestimmte Parameter sein, weiterhin schien es zweckmäßig, das Zentrum dieser Einelektronen-Eigenfunktionen in die wesentlich schwereren Atomkerne F bzw. O zu verlegen; r ist der Abstand vom Kern des schweren Atoms (F bzw. O).

¹⁾ F. A. Matsen, J. Chem. Physics **21**, 928 (1953).

²⁾ R. Gáspár, Acta Phys. Hung. **7**, 151 (1957); **7**, 447 (1957).

Dementsprechend haben wir die Eigenfunktion des Moleküls aus auf diese Kerne zentrierten Einelektronen-Eigenfunktionen, und aus den Spinfunktionen α und β dem Slaterschen Verfahren gemäß gebildet³⁾. Die Eigenfunktion ist eine Determinante zehnter Ordnung, welche sich der Vertauschung der Elektronen gegenüber antisymmetrisch verhält. Die Methode enthält folglich die Austauschenergie.

Bekanntlich wird die Gesamtenergie des Systems durch

$$E = \frac{\int \Psi^* H \Psi dv}{\int \Psi^* \Psi dv} \quad (2)$$

gegeben, wo in diesem Falle Ψ die aus den ψ_i gebildete antisymmetrische Determinante zehnter Ordnung bedeutet, und H der Hamilton-Operator des Moleküls ist, d. h.⁴⁾

$$H = \sum_i H_i + \sum_{i>k} \frac{1}{r_{ik}} + \sum_u \frac{Z}{R_u} + \sum_{u>v} \frac{1}{R_{uv}} \quad (i, k = 1, 2, \dots, 10) \quad (3)$$

mit

$$H_i = -\frac{1}{2} \Delta_i - \frac{Z}{r_i} - \sum_u \frac{1}{r_{ui}} \quad (4)$$

gilt. Sehen wir von der Wechselwirkung der Elektronen ab, so ist H_i der Hamilton-Operator des i -ten Elektrons; weiterhin ist r_i der Abstand des i -ten Elektrons vom Zentrum, d. h. vom Kern des schwereren Atoms, r_{ui} die Entfernung des i -ten Elektrons von dem Kern H_u , r_{ik} dieselbe des i -ten und des k -ten Elektrons; R_u ist der Abstand zwischen dem Zentrum und dem Proton H_u und R_{uv} derjenige zwischen den Protonen H_u und H_v ; Z bedeutet die Ordnungszahl des im Zentrum befindlichen Atoms; für u bzw. für v erstreckt sich die Summation über sämtliche Protonen; (für die verwendeten Bezeichnungen siehe im folgenden die Abbildungen.) Die beiden letzten Glieder in (3) sind Konstanten, welche die Wechselwirkungsenergie der Atomkerne wiedergeben, und welche nur bei der abschließenden Energieberechnung berücksichtigt werden müssen.

Bei der Berechnung der Energie treten Integrale der folgenden Typen auf:

$$I_j = \int \psi_j^* (i) \left(-\frac{1}{2} \Delta_i - \frac{Z}{r_i} \right) \psi_j (i) dv_i, \quad (5a)$$

$$C_{ji} = \int \psi_j^* (i) \psi_i^* (k) \frac{1}{r_{ik}} \psi_j (i) \psi_i (k) dv_i dv_k, \quad (5b)$$

$$A_{ji} = \int \psi_j^* (i) \psi_i^* (k) \frac{1}{r_{ik}} \psi_i (i) \psi_j (k) dv_i dv_k, \quad (5c)$$

$$L_j = \int \psi_j^* (i) \frac{1}{r_{ui}} \psi_j (i) dv_i. \quad (5d)$$

³⁾ J. C. Slater, Physic. Rev. **34**, 1293 (1929).

⁴⁾ Im folgenden verwenden wir durchweg atomare Einheiten, d. h. wir messen die Ladung in e , die Entfernung in a_0 , die Energie in Einheiten e^2/a_0 , wobei e die positive Elementarladung und a_0 den Radius der ersten Bohrschen Bahn im Wasserstoffatom bedeutet und $e^2/a_0 = 27,02$ eV ist; für diese siehe z. B. ⁵⁾, S. 10.

⁵⁾ P. Gombás, Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik. Birkhäuser, Basel 1950.

Von diesen sind die drei ersten Integrale vom Einzentren-Typus, welche auch bei atomaren Problemen auftreten. (5a) ist der Durchschnittswert des atomaren Einelektronen-Hamilton-Operators, (5b) ist das Coulombsche Integral, (5c) hingegen das Integral der Austauschenergie. (5d) ist ein unschwer zu behandelndes Zweizentrenintegral, welches infolge der störenden Wirkung der Protonen auftritt. Zur Berechnung von (5b) und (5c) haben wir $1/r_{ik}$ auf die bekannte Weise als eine Reihe nach Legendreschen Polynomen dargestellt. Es ergibt sich

$$\frac{1}{r_{ik}} = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=-h}^h \frac{(h-|m|)!}{(h+|m|)!} \frac{r_i^h}{r_k^{h+1}} P_h^{|m|}(\cos \vartheta_i) P_h^{|m|}(\cos \vartheta_k) e^{im(\varphi_i - \varphi_k)}, \quad (6)$$

und mit Rücksicht hierauf gilt

$$C_{jl} = \sum_{h=0}^{\infty} a^h(l m_l; l' m_{l'}) F^h(n l; n' l'), \quad (7)$$

wobei

$$F^h(n l; n' l') = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{n l}^*(r_i) R_{n' l'}^*(r_k) \frac{r_i^h}{r_k^{h+1}} r_i^2 r_k^2 dr_i dr_k \quad (8)$$

und

$$\begin{aligned} a^h(l m_l; l' m_{l'}) &= \frac{(2l+1)(l-|m_l|)!(2l'+1)(l'-|m_{l'}|)!}{2(l+|m_l|)! 2(l'+|m_{l'}|)!} \\ &\times \int_0^{\pi} \{P_l^{|m_l|}(\cos \vartheta_i)\}^2 P_h(\cos \vartheta_i) \sin \vartheta_i d\vartheta_i \int_0^{\pi} \{P_{l'}^{|m_{l'}|}(\cos \vartheta_k)\}^2 \\ &\times P_h(\cos \vartheta_k) \sin \vartheta_k d\vartheta_k \end{aligned} \quad (9)$$

ist.

Auf ähnliche Weise erhalten wir

$$A_{jl} = \sum_{h=0}^{\infty} b^h(l m_l; l' m_{l'}) G^h(n l; n' l'), \quad (10)$$

wobei

$$G^h(n l; n' l') = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{n l}(r_i) R_{n' l'}(r_i) R_{n l}(r_k) R_{n' l'}(r_k) \frac{r_i^h}{r_k^{h+1}} r_i^2 r_k^2 dr_i dr_k \quad (11)$$

und

$$\begin{aligned} b^h(l m_l; l' m_{l'}) &= \frac{(h-|m_l-m_{l'}|)!(2l+1)(l-|m_l|)!(2l'+1)(l'-|m_{l'}|)!}{4(h+|m_l-m_{l'}|)!(l+|m_l|)!(l'+|m_{l'}|)!} \\ &\times \left\{ \int_0^{\pi} P_l^{|m_l|}(\cos \vartheta) P_{l'}^{|m_{l'}|}(\cos \vartheta) P_h^{|m_l-m_{l'}|}(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \right\}^2 \end{aligned} \quad (12)$$

(5d) ist. Bei der Berechnung von (5d) wandten wir auf $1/r_{ui}$, wo dies nötig war, ebenfalls die bereits erwähnte Reihenentwicklung an. Sind die Einelektronen-Eigenfunktionen des Moleküls orthogonal, wie die hier angewandten Funktionen (1), dann läßt sich die Energie mit Hilfe der Integrale (5a) – (5d) in folgender Gestalt angeben:

$$E = \sum_j \left(I_j - \sum_u L_{uj} \right) + \sum_{j>l} C_{jl} - \sum_{j,l} A_{jl} + \sum_u \frac{Z}{R_u} + \sum_{u>v} \frac{1}{R_{uv}}. \quad (13)$$

Hierbei erstreckt sich die erste Summation auf sämtliche Elektronen, die zweite auf alle möglichen Elektronenpaare (auf jede genau einmal), und die dritte auf sämtliche Elektronenpaare mit parallelem Spin. Unter Berücksichtigung von (7) und (10) gestaltete sich die ausführliche Energieformel der betreffenden Moleküle folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 E = & 2(I_{1s} + I_{2s} + I_{2p_x} + I_{2p_y} + I_{2p_z}) \\
 & + F^0(1s; 1s) + 4F^0(1s; 2s) + 4F^0(1s; 2p_x) + 4F^0(1s; 2p_y) \\
 & + 4F^0(1s; 2p_z) + F^0(2s; 2s) + 4F^0(2s; 2p_x) + 4F^0(2s; 2p_y) \\
 & + 4F^0(2s; 2p_z) + F^0(2p_x; 2p_x) + \frac{1}{25}F^2(2p_x; 2p_x) + 4F^0(2p_x; 2p_y) \\
 & + \frac{4}{25}F^2(2p_x; 2p_y) + F^0(2p_y; 2p_y) + \frac{1}{25}F^2(2p_y; 2p_y) \\
 & + 4F^0(2p_x; 2p_z) - \frac{8}{25}F^2(2p_x; 2p_z) + 4F^0(2p_y; 2p_z) \\
 & - \frac{8}{25}F^2(2p_y; 2p_z) + F^0(2p_z; 2p_z) + \frac{4}{25}F^2(2p_z; 2p_z) \\
 & - 2\left[G^0(1s; 2s) + \frac{1}{3}G^1(1s; 2p_x) + \frac{1}{3}G^1(1s; 2p_y) \right. \\
 & + \frac{1}{3}G^1(1s; 2p_z) + \frac{1}{3}G^1(2s; 2p_x) + \frac{1}{3}G^1(2s; 2p_y) \\
 & + \frac{1}{3}G^1(2s; 2p_z) + \frac{6}{25}G^2(2p_x; 2p_y) + \frac{3}{25}G^2(2p_x; 2p_z) \\
 & \left. + \frac{3}{25}G^2(2p_y; 2p_z)\right] \\
 & - 2 \sum_u (L_{u, 1s} + L_{u, 2s} + L_{u, 2p_x} + L_{u, 2p_y} + L_{u, 2p_z}) + \sum_u \frac{Z}{R_u} + \sum_{u>v} \frac{1}{R_{uv}}.
 \end{aligned} \quad (14)$$

Die Energie (14) ist natürlich eine Funktion der Parameter a, b, c, c', d , deren Bestimmung dem Variationsprinzip gemäß auf solche Art geschah, daß dadurch der Wert der Gesamtenergie E zum Minimum würde.

Das HF-Molekül und das (HO)⁻-Molekülion

Von den Molekülen mit zehn Elektronen haben wir zuerst die je ein Proton aufweisenden Moleküle HF und (HO)⁻ betrachtet. Bei diesen haben wir die Z-Achse des Koordinatensystems als Molekülachse gewählt (s. Abb. 1). Aus Symmetriegründen konnten somit die Parameter der Funktionen ψ_{2p_x} und ψ_{2p_z} natürlich gleich gewählt werden ($c = c'$). Beim Variieren haben wir auch den Kernabstand R als Variationsparameter angesehen, d. h. wir haben mit fünf Parameter gerechnet. Die erhaltenen Ergebnisse sind in der Tab. 1 zusammengefaßt worden. Es ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Werten.

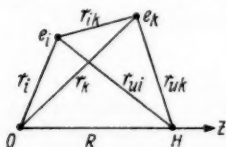


Abb. 1. Koordinatensystem und Bezeichnungen bei den Berechnungen für die Moleküle HF⁺ und (HO)⁻.

Auf Grund der vorangehenden Rechnungen haben wir auch die Bindungsenergie der Moleküle HF und (HO)⁻ bestimmt. Da das Molekül HF in Atome zerfällt, muß man zur Berechnung seiner Bindungsenergie die Energie des F-Atoms kennen. Es erwies sich jedoch als zweckmäßiger, die Bindungsenergie statt dessen mit Hilfe eines theoretischen Kreisprozesses aus den Energien der Ionen F⁻ und H⁺ unter Berücksichtigung der Elektronenaffinität zu berechnen. Das F⁻-Ion ist nämlich gleichfalls ein System mit zehn Elektronen, so daß bei der Durchführung der Rechnungen die infolge der Näherungsverfahren auftretenden Vernachlässigungen sich ähnlich gestalten, wie bei dem Molekül. Ähnliches gilt auch für das (HO)⁻-Molekülion.

Tabelle 1

Die berechneten und die experimentell bestimmten⁶⁾ Werte der Energie und des Gleichgewichtskernabstandes, sowie die Variationsparameter der besten Eigenfunktion für das HF-Molekül und das (HO)⁻-Molekülion. Die Energie, die Länge und die Variationsparameter sind in atomaren Einheiten e^2/a_0 , a_0 bzw. $1/a_0$ angegeben.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>R</i>		<i>E</i>	
					berechn.	exp.	berechn.	exp.
HF	8,7	3,1	4,9	4,4	1,57	1,73	-99,016	-100,489
(HO) ⁻	7,7	2,6	3,9	3,4	1,65		-74,404	-75,690

Der Hamilton-Operator der F⁻- und O⁻-Ionen unterscheidet sich von demjenigen der in vorangehenden betrachteten Moleküle nur dadurch, daß die Glieder $1/r_{e+}$ und $1/R$, welche der Wechselwirkung mit dem Proton entsprechen, nicht auftreten. Die Energieformel ändert sich insofern, als darin die Glieder L_z und die Konstanten Z/R fehlen. Da die Elektronenverteilung der erwähnten Ionen zentral symmetrisch ist, haben die Funktionen ψ_{2p_x} , ψ_{2p_y} und ψ_{2p_z} gleiche Parameter, d. h. es ist $c = d$.

Die durch die Variationsmethode gewonnenen Energiewerte und die Variationsparameter der besten Eigenfunktionen haben wir in der Tab. 2 zusammengefaßt. Die experimentellen bzw. die halbempirischen Werte der Elektronenaffinitäten sind⁷⁾

$$A(\text{F}^-) = 0,15_0, \quad A(\text{O}^-) = 0,086_0, \quad A(\text{O}^-) = -0,23_8.$$

Tabelle 2

Die berechneten und die experimentell bestimmten⁷⁾ Werte der Energie, und die Variationsparameter der besten Eigenfunktion für die F⁻- und O⁻-Ionen. Die Energie und die Variationsparameter sind in atomaren Einheiten e^2/a_0 bzw. $1/a_0$ angegeben

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c = d</i>	<i>E</i>	
				berechn.	exp.
F ⁻	8,7	3,1	4,6	-98,468	-99,905
O ⁻	7,7	2,7	3,5	-73,422	-74,718

⁶⁾ G. Herzberg, Molecular Spectra and Molecular Structure. I. Spectra of Diatomic Molecules, D. Van Nostrand Company, Inc., New York 1953.

⁷⁾ Landolt-Börnstein, Zahlenwerte und Funktionen, Bd. 1, Teil I, Springer-Verlag, Berlin 1950.

Somit ergeben sich für die Dissoziationsenergie der Moleküle mit Hilfe des Kreisprozesses ohne Schwierigkeit die Werte

$$D(\text{H}, \text{F}) = 0,19_8, \quad D(\text{H}, \text{O}^-) = 0,15_7.$$

Der entsprechende experimentelle Wert⁶⁾ für das Molekül HF beträgt $D(\text{H}, \text{F}) \leq 0,23_8$, der Wert für $D(\text{H}, \text{O}^-)$ ist nicht gemessen.

Wir haben die Bindungsenergie des HF-Moleküls mit einer Genauigkeit von etwa 15% erhalten, und folglich ist es wahrscheinlich, daß auch der Wert für die Bindungsenergie des (HO)-Moleküls mit einer ähnlichen Genauigkeit zutrifft. Somit ergibt sich als wahrscheinlichster Wert für die Bindungsenergie des (HO)-Molekülsions $\sim 0,18_4$ und für den Gleichgewichtskernabstand $\sim 1,82$.

Das H_2O -Molekül

Bei der Berechnung des Wassermoleküls haben wir das Koordinatensystem so gewählt, daß die Z-Achse auf die Molekülebene, d. h. auf die Ebene der Atomkerne senkrecht stehen soll (s. Abb. 2). Durch solche passende Wahl des Koordinatensystems können wir auch hier erreichen, daß die Parameter der Eigenfunktionen ψ_{2p_z} und ψ_{2p_y} gleich ausfallen. Durch eine, den vorangehenden ähnliche Variation der Parameter erhalten wir hier für die Gesamtenergie den Wert

$$E = -75,113,$$

wobei die Parameter die Werte

$$a = 7,7, \quad b = 2,6, \quad c = 3,8, \quad d = 4,1, \quad R_u = R_v = 1,62, \quad R_{uv} = 2 R_v$$

haben. Die entsprechenden experimentellen Werte sind $E = -76,306$, $R_{uv} = 1,81$.

Bekanntlich ist das Wassermolekül nicht ein lineares Molekül, und besitzt einen vom rechten Winkel nicht allzu sehr abweichenden Valenzwinkel. Unser

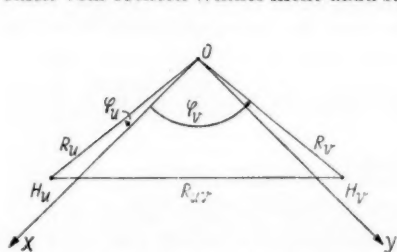


Abb. 2. Koordinatensystem und Bezeichnungen bei den Berechnungen für das Molekül H_2O

Modell verwendet für die Eigenfunktion nur die der Edelgas-konfiguration entsprechenden Funktionen von den Typen $1s$, $2s$, $2p$, was natürlich zur Folge hat, daß das Molekül gleichsam „ausgeplättet“ wird. Im Energieausdruck selbst tritt diese Umstand dadurch zutage, daß der von φ_u und von φ_v abhängige Teil in den Integralen vom Typus L_i wo er überhaupt auftreten könnte, wegfällt; demzufolge würde sich der Minimalwert der Energie für

den Fall ergeben, wo die beiden Protonen auf die größtmögliche Entfernung voneinander sind, d. h. wo der Winkel $\text{H}-\text{O}-\text{H}$ 180° beträgt. Wollen wir für den Valenzwinkel des Moleküls einen genaueren Wert erhalten, so müssen wir auch andere Elektronenkonfigurationen berücksichtigen.

Im weiteren haben wir Abschätzungen für die Bindungsenergie des H_2O angestellt. Es erwies sich als zweckmäßig, die zur Auflösung einer Bindung

bzw. zweier solcher Bindungen notwendige Dissoziationsenergie $D(\text{H}, \text{HO})$ bzw. $D(\text{H}, \text{H}, \text{O})$ für verschiedene Valenzwinkel zu berechnen, und zwar für das „geradlinige“ Molekül, für den unserem Modell am meisten entsprechenden Winkelwert 90° und für den in dem Molekül auftretenden Wert $104^\circ 27'$. Tab. 3 gibt eine Zusammenfassung unserer Ergebnisse. Die Dissoziationsenergie wurde hier, wie bereits im vorhergehenden, mit Hilfe eines theoretischen Kreisprozesses berechnet; dabei war die Energie des Molekülions $(\text{HO})^-$ bekannt, und wir machten auch davon Gebrauch, daß die Elektronenaffinität des $(\text{HO})^-$ -Ions $0,0735$ beträgt⁷⁾. Man sieht, daß die Dissoziationsenergiewerte für den tatsächlichen Valenzwinkel am besten mit der Erfahrung übereinstimmen.

Diskussion

Aus den vorangehenden Rechnungen können wir den Schluß ziehen, daß die aus Einzentren-Funktionen aufgebaute Form der Moleküleigenfunktionen sich zur Berechnung der Eigenschaften des Moleküls, z. B. zur Berechnung der totalen Energie und der Bindungsenergie vortrefflich eignet. Die Ergebnisse erreichen den Grad von Genauigkeit, welcher sich mit Hilfe der auf die Kerne zentrierten Bahnen erreichen läßt, auf wesentlich einfacherem Wege mit viel geringerer analytischer Rechenarbeit.

Tabelle 3

Die berechneten und die experimentell bestimmten Energiewerte und Dissoziationsenergiewerte des H_2O -Moleküls, in atomaren Einheiten e^2/a gemessen

Valenzwinkel	E		$D(\text{H}, \text{HO})$		$D(\text{H}, \text{H}, \text{O})$	
	berechn.	exp.	berechn.	exp.	berechn.	exp.
180°	—75,113		$0,28_2$		$0,45_2$	
$104^\circ 27'$	—75,031	—76,3065	$0,20_1$	$0,18_8$	$0,37_2$	$0,34_9$
90°	—74,985		$0,15_3$		$0,32_4$	

Da dieses, den erörterten Molekülen entsprechende Modell des vereinigten Atoms eine abgeschlossene Elektronenschale aufweist, ist die berechnete Molekülelektronendichte natürlich beinahe zentral symmetrisch, wogegen in der Wirklichkeit das zentral symmetrische Feld der F^- - und O^- -Ionen durch die Anwesenheit der Protonen erheblich beeinträchtigt wird, und somit die Elektronenwolke eine Deformation erleidet. Die in der Nähe der Protonen auftretende größere Elektronendichte wird jedoch durch dieses Modell nicht in entsprechender Weise wiedergegeben. Daraus folgt, daß solche Eigenschaften der Moleküle, bei denen die Elektronenverteilung eine wesentlichere Rolle als bei der Energieberechnung spielt, sich nicht mit der gleichen Genauigkeit wiedergeben lassen. Die Richtungsverteilung der Elektronenwolke läßt sich in der gewünschten Weise modifizieren, falls wir die in der Bindung eine wesentliche Rolle spielende Funktion ψ_{2p} durch die Superposition mehrerer, entsprechende Symmetrieeigenschaften aufweisender Funktionen ersetzen, z. B. in dieser Linearkombination auch Funktionen ψ_{3d} einführen. Obwohl sich jedoch dabei bessere Resultate erzielen lassen, werden die erforderlichen Rechnungen unverhältnismäßig langwieriger.

Ähnliche Rechnungen mit Hilfe von Einzentren-Eigenfunktionen sind für das Wassermolekül neuerdings auch durch K. Funabashi und J. L. Magee⁸⁾ angestellt worden. Diese Autoren haben die Funktion ψ_{2s} bezüglich ψ_{1s} orthogonalisiert, indem sie die Parameter dieser beiden Funktionen als gleich annahmen, und obwohl die Beiträge der Funktionen ψ_{2px} , ψ_{2py} , ψ_{2pz} zur Bindungsenergie offenbar ungleich sind, haben sie der Einfachheit halber auch die Parameter dieser Funktionen einander gleich gewählt. Der somit unter Berücksichtigung zweier Variationsparameter gewonnene Energiewert betrug $E = -74,11$.

K. E. Banyard und N. H. March⁹⁾ haben bei ihren Berechnungen bezüglich der H_2O Molekülwellenfunktion gleichsam eine Näherung mit zentralem Feld angewandt. In der Determinante zehnter Ordnung der Wellenfunktion haben sie für die Funktion ψ_{2s} die auch von uns gebrauchte Fock-Petrashen-sche Gestalt gewählt, aber sie haben die Parameter sämtlicher Funktionen ψ_{2p} als einander gleich angenommen. Auf diese Weise haben sie für den, dem experimentellen Wert entsprechenden fixen Kernabstand 1,81 und für den Valenzwinkel 105° den Energiewert $-75,00$ gewonnen. Diese Autoren behaupten, daß man durch Annahme verschiedener Parameterwerte für die Funktionen ψ_{2px} , ψ_{2py} , ψ_{2pz} keine wesentliche Energieerniedrigung erzielen kann, und weisen dies für das NH_3 -Molekül nach (sie geben $E = -55,263$ für ungleiche bzw. $E = -55,262$ für gleiche Parameterwerte). Unsere Berechnungen hingegen zeigen, daß im Falle, wo die Parameter der Funktionen ψ_{2p} nicht gleich gewählt werden und auch der Kernabstand variiert wird, die sich ergebende Energieerniedrigung dermaßen wesentlich ist, daß wir dabei sogar für die Bindungsenergie quantitativ gute Ergebnisse bekommen konnten.

Zum Schluß möchten wir Frau Anna G. Bodnár und Herrn József Alföldy für die Durchführung eines großen Teiles der numerischen Rechnungen unseren Dank aussprechen.

⁸⁾ K. Funabashi u. J. L. Magee, J. chem. Physics **26**, 407 (1957).

⁹⁾ K. E. Banyard u. N. H. March, Acta Cryst. **9**, 385 (1956); J. Chem. Physics **27**, 977 (1957).

Debrecen, Institut für Theoretische Physik der Kossuth-Lajos-Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 17. März 1958.

Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6; für den Anzeigenteil: VEB Georg Thieme, Anzeigenabteilung, Leipzig C 1, Thomaskirchhof 20, Ruf 21 005. Z. Z. gilt Anzeigenpreisliste Nr. 4; Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salomonstr. 18 B.

Fernruf: 27 681, 27 682. ZLN 5066

Printed in Germany

Druck: Paul Dünhaupt, Köthen (IV/5/1) L 171/59

Wissenschaftliche Selbstbiographie

von MAX PLANCK

3. Auflage,

34 Seiten m. 1 Bildnis. 1955.

DIN A5. DM 1.35

(Bildet: Nr. 5. Lebensdarstellungen
Deutscher Naturforscher. Herausgegeben
von der Deutschen Akademie der Na-
turforscher Leopoldina)

JOHANN AMBROSIOUS BARTH
VERLAG / LEIPZIG

PRESSLER



PHOTOZELLEN

für Wissenschaft
und Technik

DEUTSCHE GLIMMLAMPEN-GES. PRESSLER
LEIPZIG C1. BERLINER STR. 69

Statistik und Physik der Kometen

Von Dr. NIKOLAUS B. RICHTER

Sternwarte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin in Sonneberg (Thür.)

VI, 142 Seiten mit 58 Abbildungen im Text. 1954. Gr. 8°. DM 13.40

Orion: Das Buch soll dem Leser einen genauen Bericht über den Stand der heutigen Kometenforschung geben. Die beigelegten Tabellen und Diagramme werden jedem, der sich mit Kometenforschung ernstlich befassen will, weiter helfen. Der Verfasser hat außerdem noch einige bisher von ihm nicht veröffentlichte Ergebnisse mit in das Buch hineingearbeitet, das durch ein sehr ausführliches Literaturverzeichnis abgeschlossen wird.

Meteorströme

Meteoric Currents

Von Prof. Dr. C. HOFFMEISTER

Sternwarte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin in Sonneberg (Thür.)

VIII, 286 Seiten mit 109 Abbildungen im Text und 1 Ausklapptafel. Mit Zusammenfassungen in englischer Sprache. 1948. Gr. 8°. DM 18.—, Hln. DM 20.—

Astronomische Nachrichten: Die Darstellung folgt im wesentlichen den verschiedenen Phasen der fortschreitenden Lösung des Problems durch Sammlung von Beobachtungsmaterial und dessen kritische, durch theoretische Betrachtungen geleitete Verarbeitung. — Insgesamt bietet das Buch eine große Fülle von Originalmaterial, von kritischen Diskussionen und neuen Ergebnissen.

J. Wempe

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Einführung in die Theorie der Elektronenoptik

Von Dr. phil. JOHANNES PICTH

o. Prof. für theoretische Physik und Optik, Pädagogische Hochschule Potsdam-Sanssouci
(früher Techn. Hochschule Berlin-Charlottenburg)

2., erweiterte Auflage

VIII, 274 Seiten mit 70 Abbildungen im Text. 1957. Gr. 8°

DM 29.20, Leinen DM 31.—

Über die erste im Jahre 1939 erschienene Auflage des Buches schrieb Professor Dr. Brüche in der „Elektrotechnischen Zeitschrift“:

„Eine mit großer Sachkenntnis geschriebene Einführung in die Theorie, die durch ihr hohes Niveau und durch die klare Darstellung dem Theoretiker ein schnelles und tiefes Eindringen in die Grundlagen und den mathematischen Apparat der geometrischen Elektronenoptik ermöglicht. Das Buch kann jedem, der sich ernstlich mit der Elektronenoptik befassen will, aufs wärmste empfohlen werden.“

Die neue Auflage ist auf den neuesten Stand der Wissenschaft gebracht worden, wodurch sich eine Erweiterung des Umfanges ergab. Der Verfasser war bemüht, den Charakter einer Einführung in das Gebiet zu wahren, insbesondere die mathematischen und gedanklichen Überlegungen soweit durchzuführen, wie dies zum ausreichenden Verständnis der theoretischen Zusammenhänge erforderlich schien.

Arbeitstagung Festkörperphysik II

vom 8. bis 11. April 1954 in Dresden

Redaktion Dr. K. W. Böer, Berlin

219 Seiten mit 205 Abbildungen im Text. 1955. Gr. 8°. DM 21.—

Neue Hütte: Der dargebotene Stoff hat keineswegs nur für den theoretischen Physiker oder Physiko-Chemiker, sondern auch für den physikalisch-chemisch orientierten Metallkundler besonderes Interesse. Man kann sagen, daß die Niederlegung der Tagungsberichte in Buchform sehr wertvoll ist, da sich in den Vorträgen eine große Zahl fruchtbarer Gedanken und Ansätze zur Theorienbildung zeigt. Die Beiträge sind von hohem wissenschaftlichem Niveau. Thümmler

Klassische Arbeiten deutscher Physiker

Herausgegeben von der Physikalischen Gesellschaft in der
Deutschen Demokratischen Republik

Heft 1: W. C. RÖNTGEN, **Grundlegende Abhandlungen über die X-Strahlen**

44 Seiten und 1 Porträt. 1954. Gr. 8°. DM 2.70

Die Technik: Es ist sehr zu begrüßen, daß die Originalarbeiten Röntgens über seine Entdeckung der X-Strahlen neu herausgegeben worden sind. Das Studium der kleinen Schrift führt uns die Größe der Entdeckung Röntgens vor Augen und zeigt, daß er dank seiner Gründlichkeit bereits die wichtigsten Eigenschaften der X-Strahlen feststellen konnte. Das Studium der Abhandlungen kann sehr empfohlen werden. Freyer

Heft 2: W. FRIEDRICH, P. KNIPPING, M. v. LAUE, **Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen**

36 Seiten mit 3 Abb. im Text und 4 Tafeln. 1955. Gr. 8°. DM 3.—

Röntgen- und Laboratoriumspraxis: Nachdem im ersten Heft die grundlegenden Arbeiten Röntgens abgedruckt worden waren, folgt jetzt im zweiten Heft der Serie die originalgetreue Wiedergabe der Veröffentlichung von Laue, Friedrich und Knipping aus dem Jahrgang 1913 der „Annalen der Physik“ über Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen. Es ist außerordentlich reizvoll, den grundlegenden theoretischen Ausführungen zu folgen, die Laue über die vermutliche Wellennatur der Röntgenstrahlen und die Möglichkeit, sie mit Hilfe von Interferenzerscheinungen an dem regelmäßigen Raumgitter von Kristallen zu beweisen, in dieser Arbeit gemacht hat. GJ.

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG